Analisi

Classe quinta

Studio completo della *versiera* di Agnesi

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

$$\text{Per } a = 3 \rightarrow \; y = \frac{27}{9 + x^2}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado, C.E.: $\forall x \in \Re$.

2) **Simmetrie**:

La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, cioè è pari perché si verifica la condizione $f(x) = f(-x)$.

3) **Studio del segno**:

Si pone: $\frac{27}{9 + x^2} > 0$ ossia:

$N(x): 27 > 0 \rightarrow \text{sempre}$

$D(x): 9 + x^2 > 0 \rightarrow \text{sempre}$

Pertanto, la funzione è sempre positiva per tutto l'asse delle ascisse.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani**:

La funzione data non interseca l'asse x, ma interseca l'asse delle ordinate nel punto $A(0;3)$.

5) **Asintoti**:

La funzione ha un asintoto orizzontale, infatti:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{27}{9 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{27}{9 + x^2} = 0$, quindi la funzione data è asintotica all'asse x.

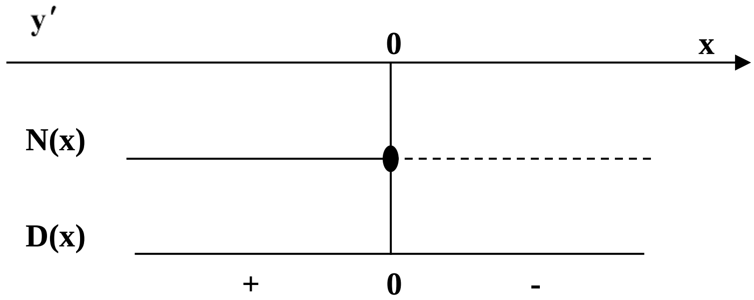
6) **Crescenza o decrescenza**:

Calcolando la derivata prima si ha: $\mathbf{y' = \dfrac{-54x}{\left(9+x^2\right)^2}}$,

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$\mathbf{N(x): -54x \geq 0 \rightarrow x \leq 0}$

$\mathbf{D(x): \left(9+x^2\right)^2 > 0 \ \ sempre \ \ nel \ \ C.E.}$



pertanto, essendo la derivata prima positiva per $\mathbf{x < 0}$, la funzione data è ivi crescente, mentre, essendo la derivata prima negativa per $\mathbf{x > 0}$, la funzione è ivi decrescente, infine, la derivata prima è nulla per $\mathbf{x = 0}$.

7) **Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale**:

La funzione data ha un massimante nel punto di ascissa $\mathbf{x = 0}$, quindi, essendo $\mathbf{f(0) = 3}$, la funzione presenta un massimo relativo nel punto $\mathbf{A(0;3)}$.

8) **Concavità e convessità**:

Calcolando la derivata seconda si ha:

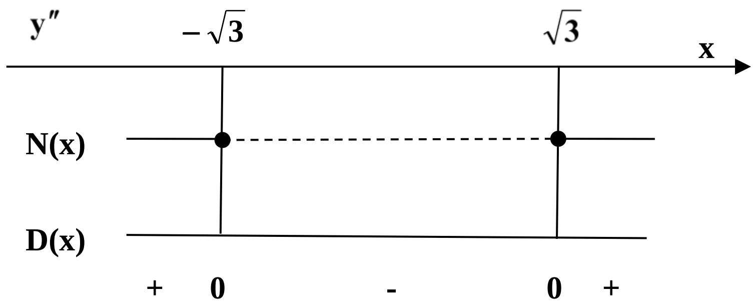
$\mathbf{y'' = \dfrac{-54(9+x^2)^2 + 54x\left(4x^3+36x\right)}{\left(9+x^2\right)^4}}$, cioè $\mathbf{y'' = \dfrac{-54(9+x^2)^2 + 54 \bullet 4x^2\left(9+x^2\right)}{\left(9+x^2\right)^4}}$ ossia

$\mathbf{y'' = \dfrac{54(9+x^2)\left[-\left(9+x^2\right)+4x^2\right]}{\left(9+x^2\right)^4}}$, semplificando si ha: $\mathbf{y'' = \dfrac{54\left(3x^2-9\right)}{\left(9+x^2\right)^3} \rightarrow \dfrac{162\left(x^2-3\right)}{\left(9+x^2\right)^3}}$.

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$\mathbf{N(x): 162\left(x^2-3\right) > 0 \rightarrow x^2-3 > 0 \rightarrow x < -\sqrt{3} \wedge x > \sqrt{3}}$

$\mathbf{D(x): \left(9+x^2\right)^3 > 0 \rightarrow 9+x^2 > 0 \rightarrow sempre.}$

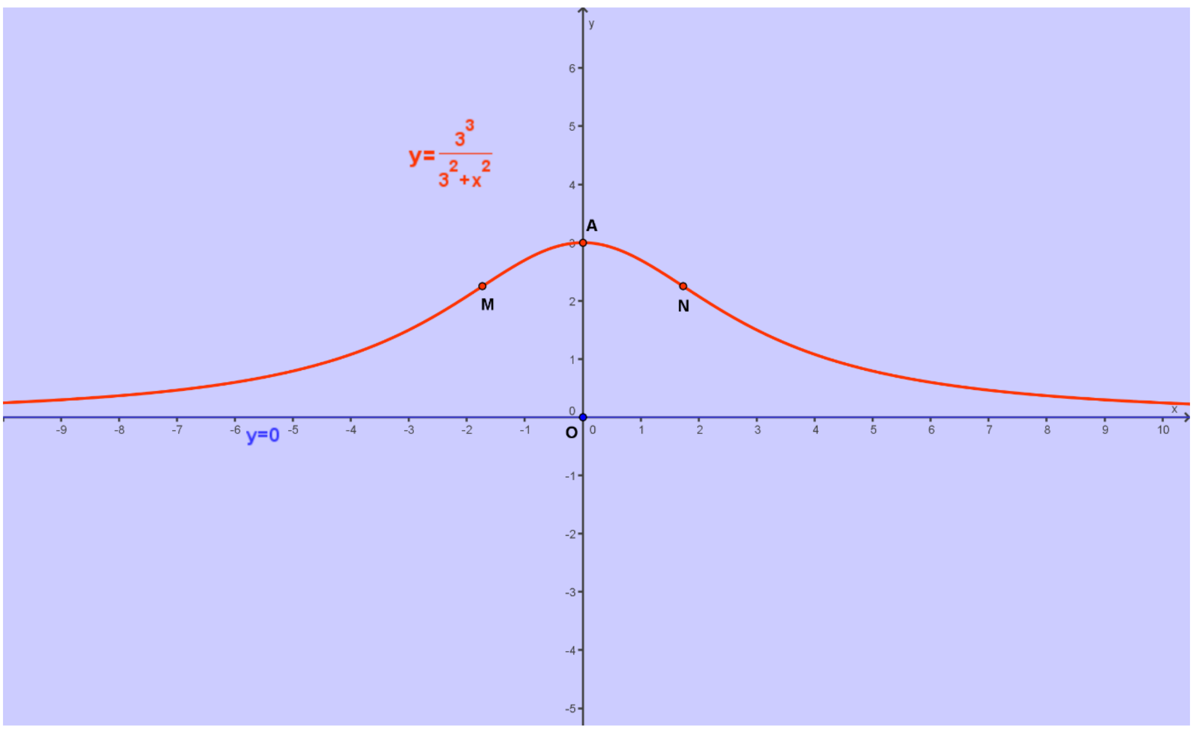


pertanto, per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione data è concava verso il basso, mentre per $x < -\sqrt{3} \wedge x > \sqrt{3}$ la derivata seconda è positiva, quindi la funzione data è concava verso l'alto, inoltre, la derivata seconda si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$.

9) **Flessi a tangente obliqua**:

La funzione ha due punti di flesso a tangente obliqua nei punti $M\left(-\sqrt{3};\frac{9}{4}\right)$ ed $N\left(\sqrt{3};\frac{9}{4}\right)$, inoltre, essendo $f'(-\sqrt{3}) > 0$, il flesso **M** è ascendente, mentre essendo $f'(\sqrt{3}) < 0$, il flesso **N** è discendente.

10) **Grafico**:



[Cenni storici] [Torna su]