Equazioni algebriche di grado superiore al secondo

EQUAZIONI ALGEBRICHE DI TERZO GRADO

Definizioni

Un'equazione algebrica cubica completa è un quadrinomio di terzo grado uguagliato a zero, nella variabile x ordinato decrescente, la sua forma canonica è

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad con\ a \neq 0$$

Un'equazione algebrica cubica si dice incompleta quando almeno uno dei coefficienti b, c, d si annulla, quindi si possono presentare i seguenti casi di equazioni algebriche di terzo grado incomplete:

$d = 0$	$ax^3 + bx^2 + cx = 0$	Spuria (primo caso)
$c = d = 0$	$ax^3 + bx^2 = 0$	Spuria (secondo caso)
$b = d = 0$	$ax^3 + cx = 0$	Spuria (terzo caso)
$c = 0$	$ax^3 + bx^2 + d = 0$	Mista (primo caso)
$b = 0$	$ax^3 + cx + d = 0$	Mista (secondo caso)
$b = c = 0$	$ax^3 + d = 0$	Pura (binomia cubica)
$b = c = d = 0$	$ax^3 = 0$	Monomia

Esercizi svolti

1. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado spuria (primo caso: $d = 0$).

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

e scomponendo il trinomio notevole $x^2 - 6x + 8$ l'equazione data si può scrivere

$$x(x-2)(x-4) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x = 0$

secondo fattore: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

terzo fattore: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali e distinte.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

2. Risolvere l'equazione

$$4x^3 - 20x^2 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado spuria (secondo caso: $c = d = 0$).

Mettendo la quantità $4x^2$ a fattor comune totale si ottiene

$$4x^2(x-5) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $4x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \ (molteplicita' \, due)$

secondo fattore: $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali, di cui due coincidenti.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

3. Risolvere l'equazione

$$2x^3 - 18x = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado spuria (terzo caso: $b = d = 0$).

Mettendo la quantità $2x$ a fattor comune totale si ottiene

$$2x(x^2 - 9) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $2x = 0 \rightarrow x = 0$

secondo fattore: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali, di cui due opposte.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

4. Risolvere l'equazione

$$2x^3 + 18x = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado spuria (terzo caso: $b = d = 0$).

Mettendo la quantità $2x$ a fattor comune totale si ottiene

$$2x(x^2 + 9) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $2x = 0 \rightarrow x = 0$

secondo fattore: $x^2 + 9 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \;\; (z = \pm 3i \in \mathbb{C})$

Quindi, l'equazione data ammette una soluzione reale (e due opposte nel campo di Gauss).

Rappresentazione unidimensionale della soluzione reale:

5. Risolvere l'equazione

$$4x^3 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado monomia ($b = c = d = 0$).

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $4 \neq 0$

secondo fattore: $x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \; (molteplicita' \; tre)$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali e coincidenti.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

6. **Risolvere l'equazione**

$$x^3 + 1 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado pura ($b = c = 0$).

Osservando che il binomio al primo membro è una somma di due cubi si può scomporre utilizzando la regola

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Quindi, l'equazione data si può scrivere

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x + 1 = 0 \ \rightarrow x = -1$

secondo fattore: $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \ quindi \nexists x \in \mathbb{R}$

$$(z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \in \mathbb{C})$$

Quindi, l'equazione data ammette una soluzione reale (e due complesse coniugate nel campo di Gauss).

Rappresentazione unidimensionale della soluzione reale:

7. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 1 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado pura ($b = c = 0$).

Osservando che il binomio al primo membro è una differenza di due cubi si può scomporre utilizzando la regola

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Quindi, l'equazione data si può scrivere

$$x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x - 1 = 0 \ \rightarrow x = 1$

secondo fattore: $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \ quindi \ \nexists x \in \mathbb{R}$

$$\left(z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \in \mathbb{C}\right)$$

Quindi, l'equazione data ammette una soluzione reale (e due complesse coniugate nel campo di Gauss).

Rappresentazione unidimensionale della soluzione reale:

8. Risolvere l'equazione

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado mista ($c = 0$).

Il trinomio al primo membro si può scrivere nel seguente modo

$$x^3 + x^2 - 1 - 1 = 0$$

Cioè

$$x^3 - 1 + x^2 - 1 = 0$$

Osservando che i primi due monomi rappresentano una differenza di due cubi, mentre associando il terzo con il quarto si è in presenza di una differenza di quadrati, allora il primo membro si può scomporre nel seguente modo

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(x+1) = 0$$

Mettendo in evidenza a fattor totale comune il binomio $(x-1)$ l'equazione data si può scrivere

$$(x-1)(x^2 + x + 1 + x + 1) = 0$$

Cioè

$$(x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x - 1 = 0 \;\rightarrow x = 1$

secondo fattore: $x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \; quindi \; \nexists x \in \mathbb{R}$

$$\left(z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\,i}{2} = -1 \pm i \in \mathbb{C}\right)$$

Quindi, l'equazione data ammette una soluzione reale (e due complesse coniugate nel campo di Gauss).

Rappresentazione unidimensionale della soluzione reale:

Osservazione

Si ottengono le stesse conclusioni se si scompone il trinomio $x^3 + x^2 - 2$ **applicando la regola di Ruffini.**

I divisori algebrici del termine noto sono $\pm 1 \; e \pm 2$

Per il Teorema del resto ha senso scrivere

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2$$

$P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ **pertanto, il trinomio è divisibile per il binomio** $x - 1$

Applicando la regola di Ruffini si ha

	1	1	0	-2
1		1	2	2
	1	2	2	0

Quindi il trinomio $x^3 + x^2 - 2$ **è uguale al prodotto**

$$(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$$

9. Risolvere l'equazione

$$x^3 + x - 2 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado mista ($b = 0$).

Il trinomio al primo membro si può scrivere nel seguente modo

$$x^3 + x - 1 - 1 = 0$$

Cioè

$$x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

Osservando che i primi due monomi rappresentano una differenza di due cubi, si può scomporre nel seguente modo

$$(x-1)(x^2+x+1) + 1(x-1) = 0$$

Mettendo in evidenza a fattor totale comune il binomio $(x-1)$ l'equazione data si può scrivere

$$(x-1)(x^2+x+1+1) = 0$$

Cioè

$$(x-1)(x^2+x+2) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x - 1 = 0 \;\rightarrow x = 1$

secondo fattore: $x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \; quindi \; \nexists x \in \mathbb{R}$

$$\left(z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}\, i}{2} \in \mathbb{C}\right)$$

Quindi, l'equazione data ammette una soluzione reale (e due complesse coniugate nel campo di Gauss).

Rappresentazione unidimensionale della soluzione reale:

Si ottengono le stesse conclusioni se si scompone il trinomio $x^3 + x - 2$ applicandola regola di Ruffini.

10. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado completa.

Il quadrinomio, scritto al primo membro, è lo sviluppo del seguente cubo del binomio

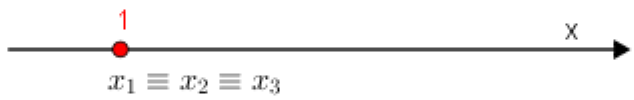
$$(x-1)^3$$

Pertanto, ha senso scrivere

$$(x-1)^3 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \ (molteplicita' \ tre)$$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali e coincidenti.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



11. Risolvere l'equazione

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado completa

Il quadrinomio, scritto al primo membro, è lo sviluppo del seguente cubo del binomio

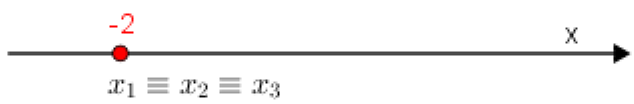
$$(x+2)^3$$

Pertanto, ha senso scrivere

$$(x+2)^3 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \ (molteplicita' \ tre)$$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali e coincidenti.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



12. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

È un'equazione algebrica di terzo grado completa.

Il quadrinomio, scritto al primo membro, si può scomporre mediante la regola di Ruffini.

Pertanto, ha senso scrivere

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

secondo fattore: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

terzo fattore: $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Quindi, l'equazione data ammette tre soluzioni reali e distinte.

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali: