A) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = x^3 - 5x^2 + 6x}$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica spuria), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 - 5x^2 + 6x - y = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 - 5x^2 - 6x \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;2)$ e $B(-1\,;-12)$ sono punti del grafico non simmetrici.

Studio del segno: si pone

$$x^3 - 5x^2 + 6x \geq 0$$

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 - 5x + 6) \geq 0$$

e scomponendo il trinomio notevole $x^2 - 5x + 6$ la disequazione data si può scrivere

$$x(x-2)(x-3) \geq 0$$

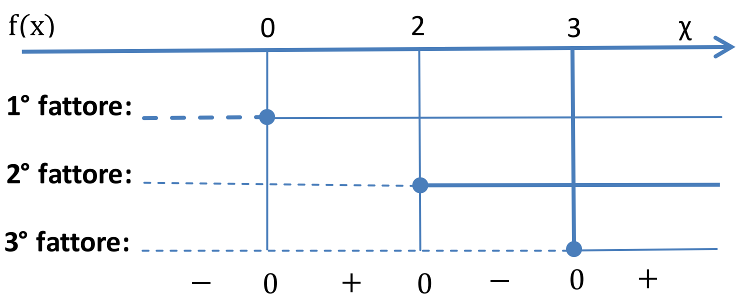
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

terzo fattore: $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]0\,;2[$ e $]3\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[$ e $]2\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x = 0$, $x = 2$ e $x = 3$.

<u>Osservazione</u>

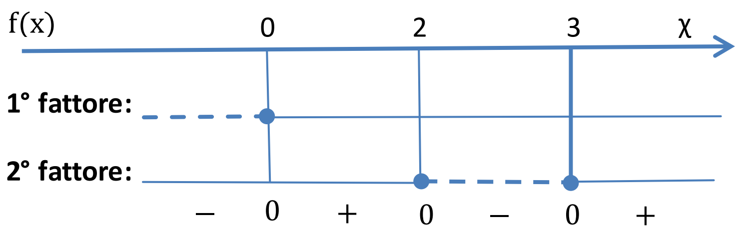
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $x(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

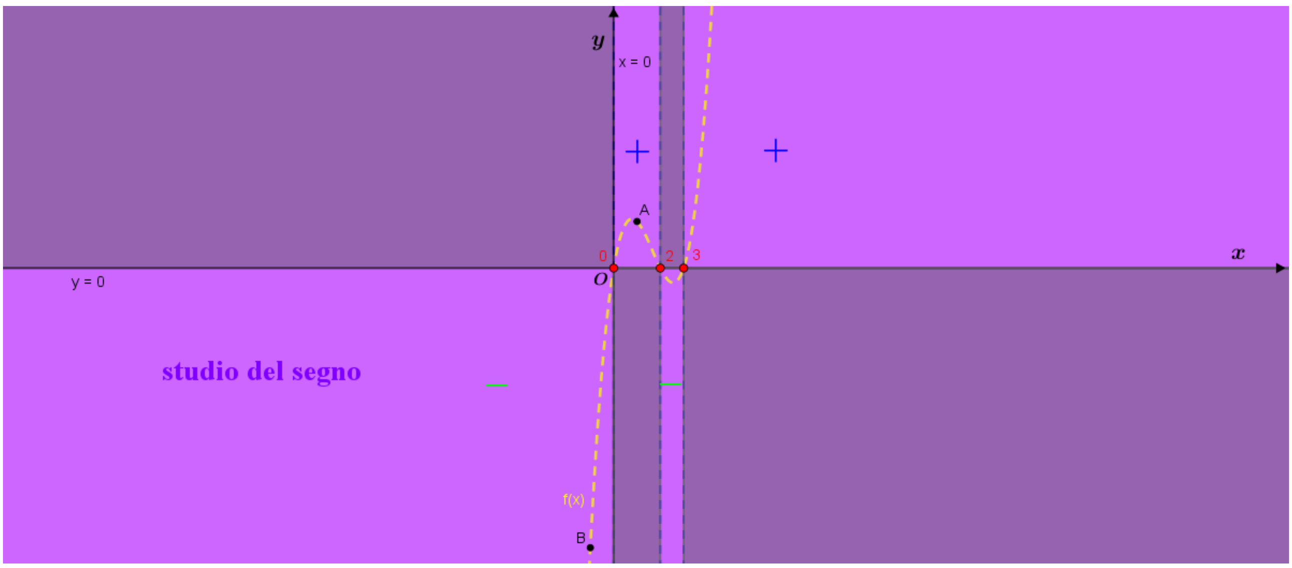
primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \rightarrow x \leq 2\,, x \geq 3$ (il trinomio è positivo per i valori esterni dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



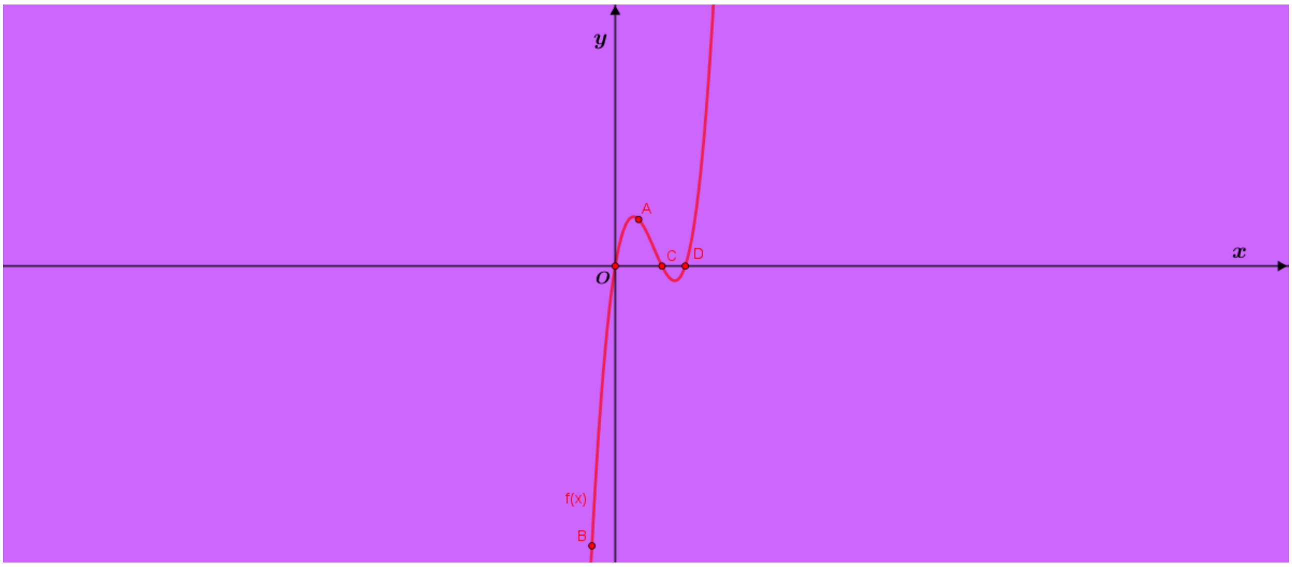
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 5x^2 + 6x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(2;0),\ \ D(3;0)\ e\ O(0;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 5x^2 + 6x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow O(0;0)$$

Grafico:



B) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = x^3 - 6x^2 + 5x}$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica spuria), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 - 6x^2 + 5x - y = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 5x \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della vari abile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(2\,;-6)\ e\ B(-2\,;-42)$ sono punti del grafico non simmetrici.

Studio del segno: si pone

$$x^3 - 6x^2 + 5x \geq 0$$

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 - 6x + 5) \geq 0$$

e scomponendo il trinomio notevole $x^2 - 6x + 5$ la disequazione data si può scrivere

$$x(x-1)(x-5) \geq 0$$

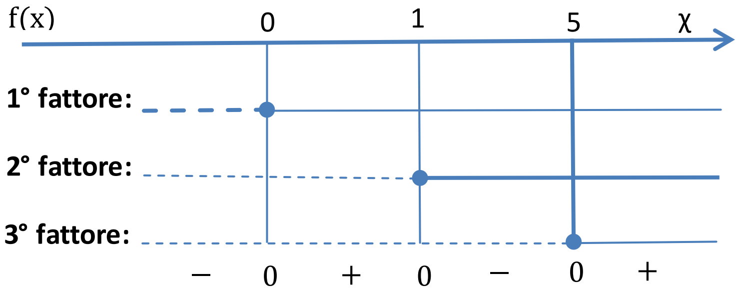
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

terzo fattore: $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]0\,;1[$ e $]5\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[$ e $]1\,;5[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=0$, $x=1$ e $x=5$.

<u>Osservazione</u>

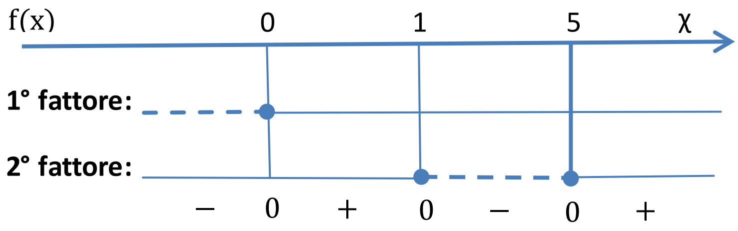
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $x(x^2-6x+5)\geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

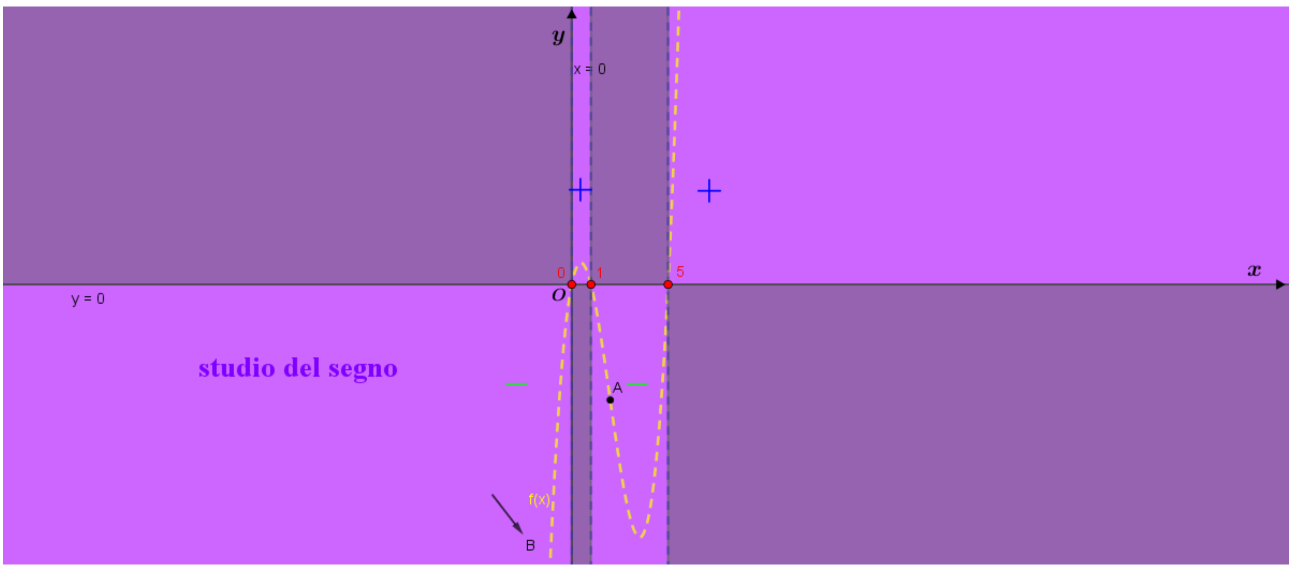
primo fattore: $x\geq 0$

secondo fattore: $x^2-6x+5\geq 0 \rightarrow x\leq 1\,, x\geq 5$ (il trinomio è positivo per i valori esterni dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



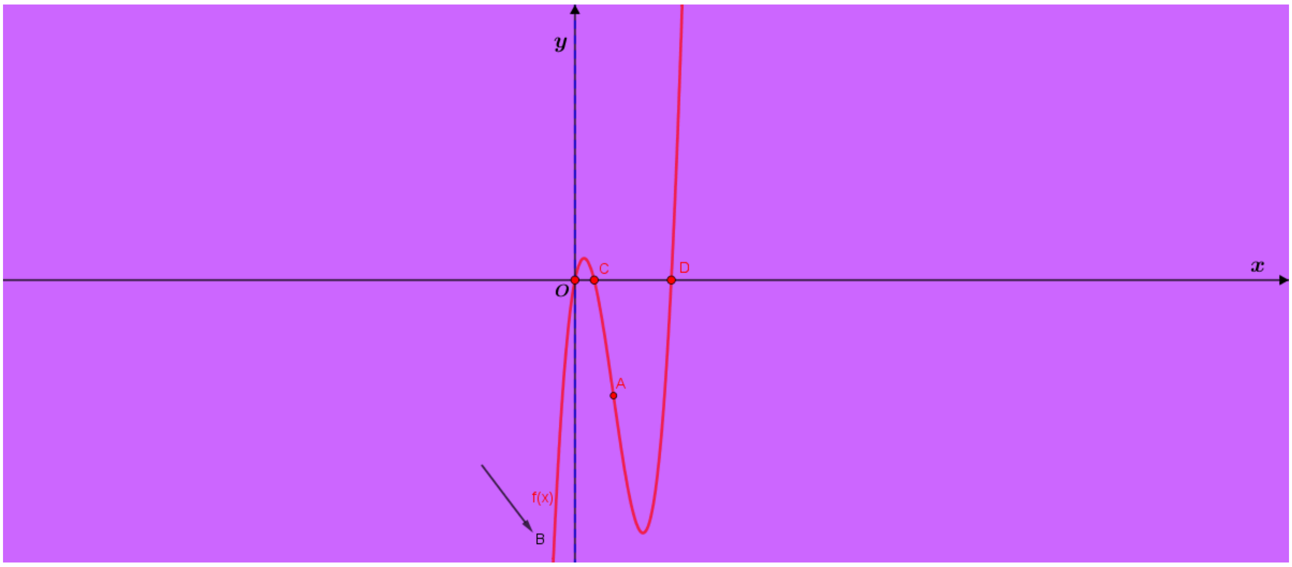
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 5x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(1;0),\ \ D(5;0)\ e\ O(0;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 5x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow O(0;0)$$

Grafico:



C) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = x^3 + 7x^2 + 10x}$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica spuria), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 + 7x^2 + 10x - y = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 + 7x^2 + 10x$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 + 7x^2 - 10x \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;18)$ e $B(-1\,;-4)$ sono punti del grafico non simmetrici.

Studio del segno: si pone

$$x^3 + 7x^2 + 10x \geq 0$$

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 + 7x + 10) \geq 0$$

e scomponendo il trinomio notevole $x^2 - 5x + 6$ la disequazione data si può scrivere

$$x(x+2)(x+5) \geq 0$$

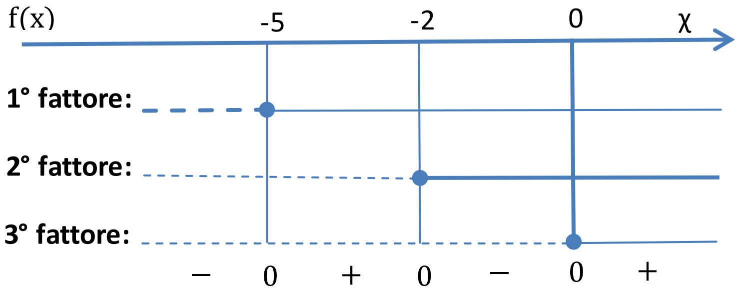
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$

secondo fattore: $x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

terzo fattore: $x \geq 0$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]-5\,;-2[\ e\ ]0\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;-5[\ e\ ]-2\,;0[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=-5$, $x=-2$ e $x=0$.

Osservazione

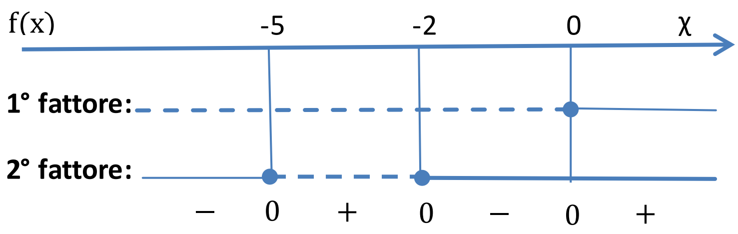
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $x(x^2+7x+10)\geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

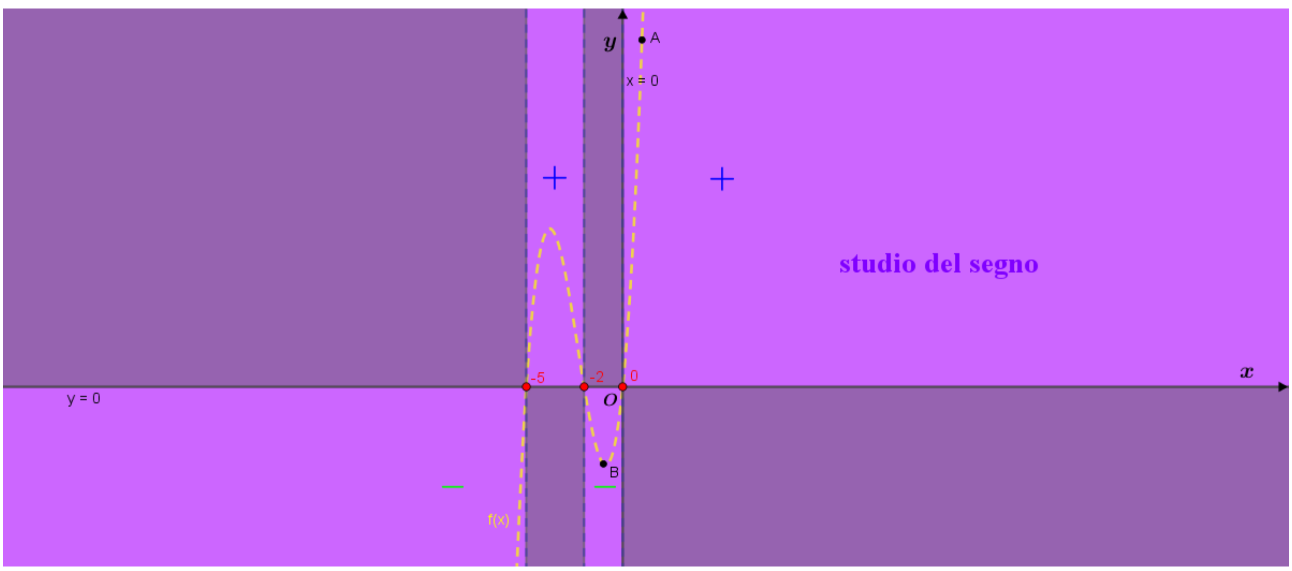
primo fattore: $x\geq 0$

secondo fattore: $x^2+7x+10\geq 0 \rightarrow x\leq -5\,, x\geq -2$ (il trinomio è positivo per i valori estemi dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



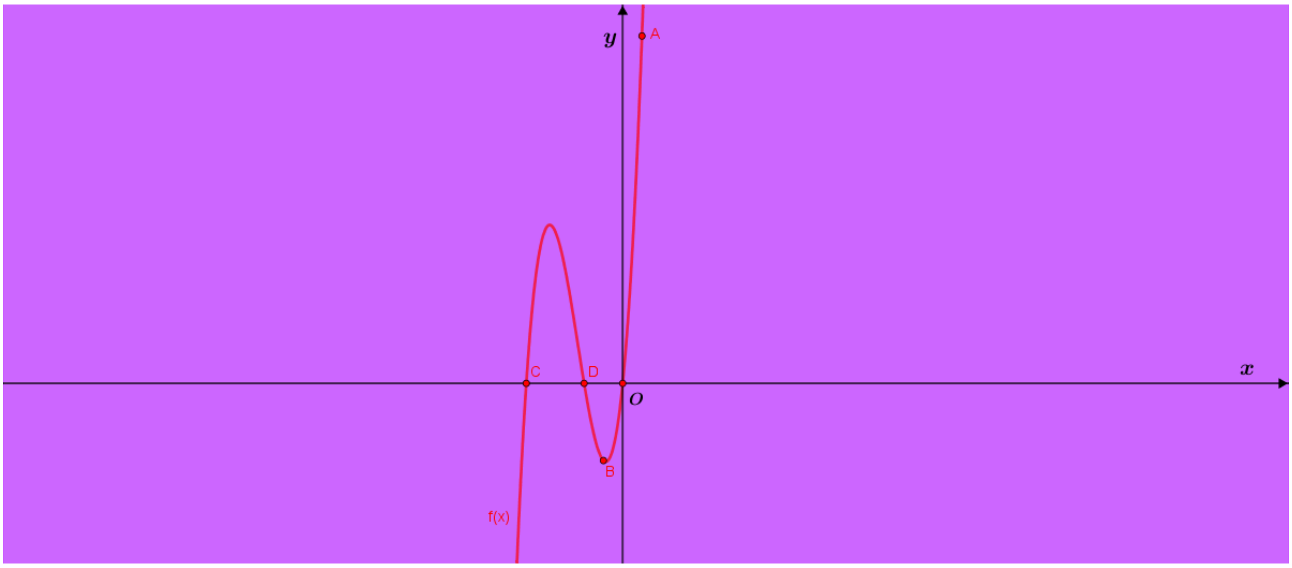
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 + 7x^2 + 10x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow C(-5;0),\ D(-2;0)\ e\ O(0;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 + 7x^2 + +10x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow O(0;0)$$

Grafico:



D) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = x^3 - 4x^2}$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica spuria), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 - 4x^2 - y = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 - 4x^2$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 - 4x^2 \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;-3)\ e\ B(-1\,;-5)$ sono punti del grafico non simmetrici.

Studio del segno: si pone

$$x^3 - 4x^2 \geq 0$$

Mettendo la quantità x^2 a fattor comune totale si ottiene

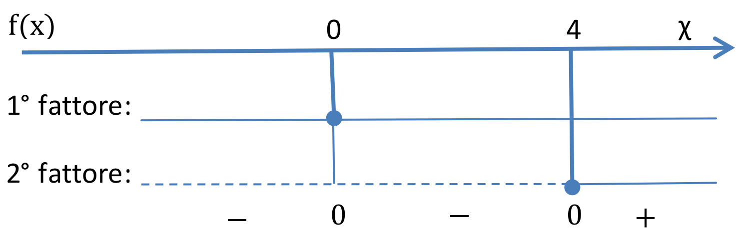
$$x^2(x-4) \geq 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x^2 \geq 0 \ \rightarrow \forall \in \mathbb{R}$ (la disequazione è sempre verificata per tutti i valori del dominio)

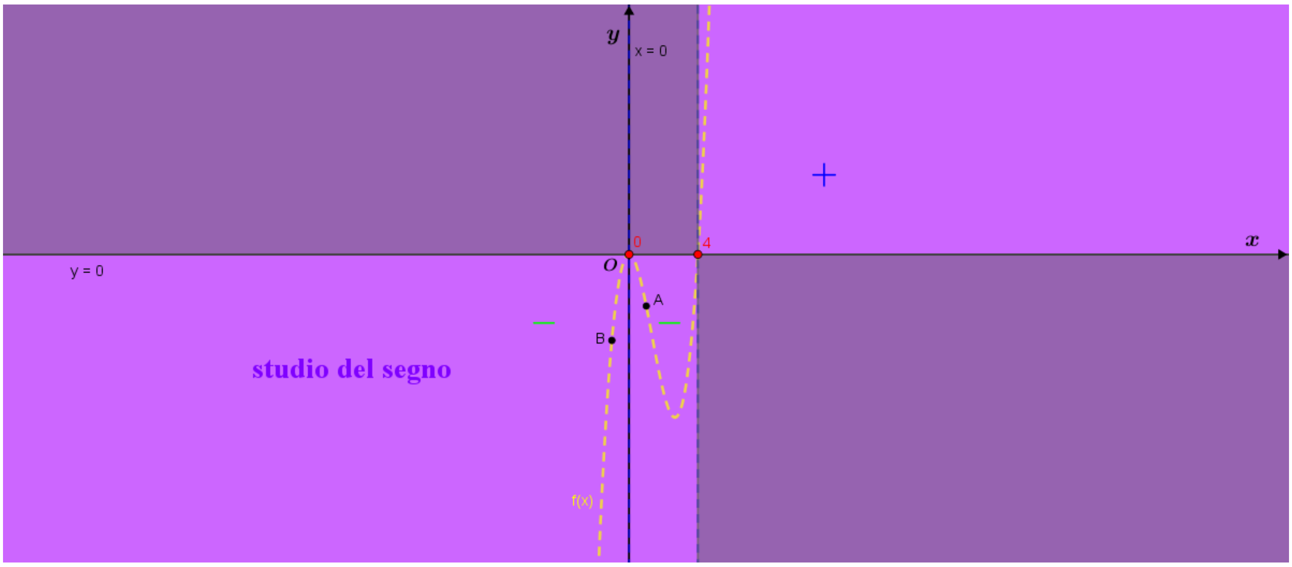
secondo fattore: $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva nell'intervallo aperto $]4\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[\ e\ ]0\,;4[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x = 0$ e per $x = 4$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



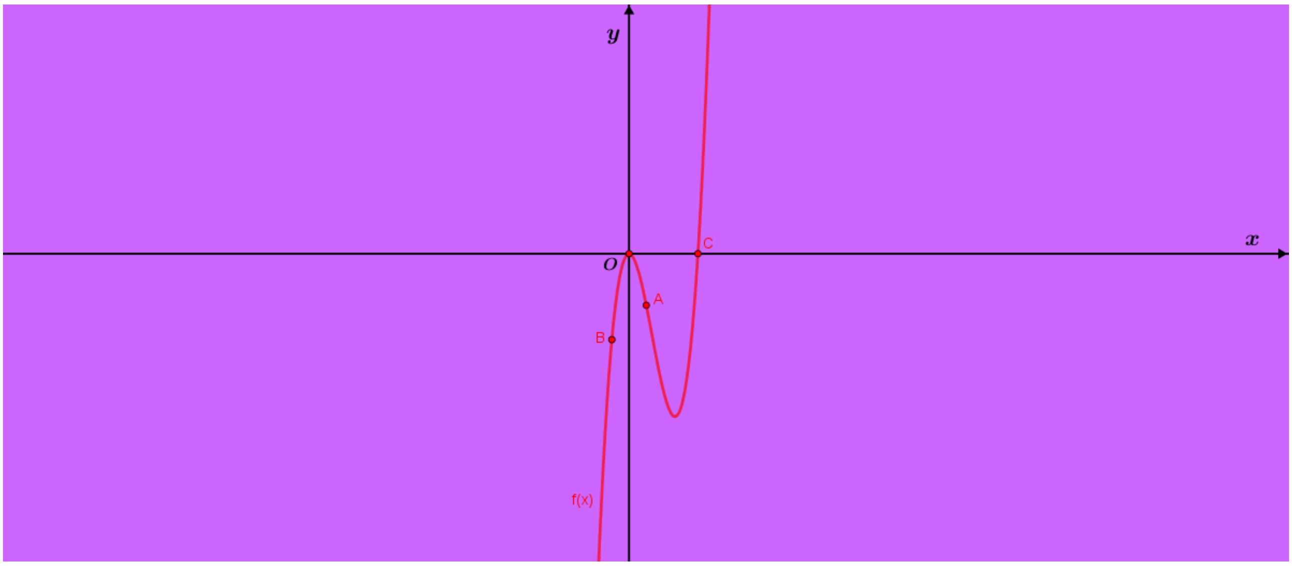
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 4x^2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \to C(4;0)\ e\ O(0;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 4x^2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \to O(0;0)$$

Grafico:



E) Data la funzione

$$y = x^3 - 4x$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica spuria), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 - 4x - y = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 - 4x$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$, quindi la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, ossia è dispari. Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;-3)$ e $B(-1\,;+3)$ sono punti del grafico simmetrici.

Studio del segno: si pone

$$x^3 - 4x \geq 0$$

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 - 4) \geq 0$$

e scomponendo la differenza di due quadrati $x^2 - 4$ la disequazione data si può scrivere

$$x(x-2)(x+2) \geq 0$$

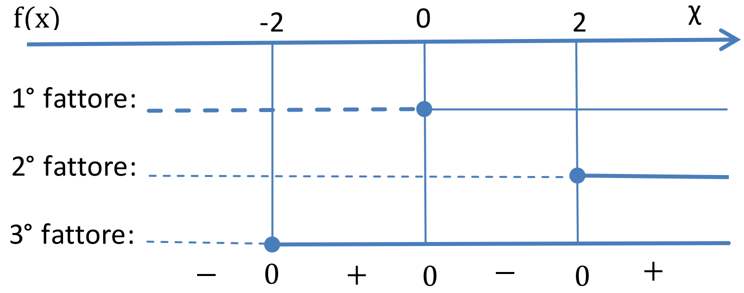
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

terzo fattore: $x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]-2\,;0[$ e $]2\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;-2[$ e $]0\,;2[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x=-2$, $x=0$ e $x=2$.

<u>Osservazione</u>

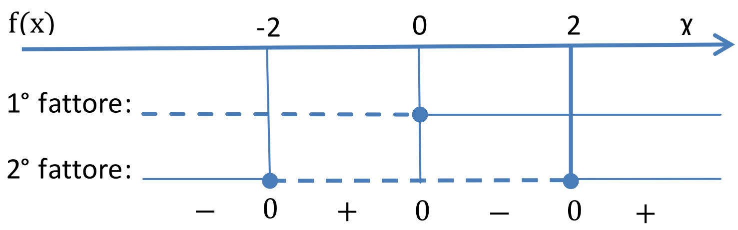
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $x(x^2-4)\geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x\geq 0$

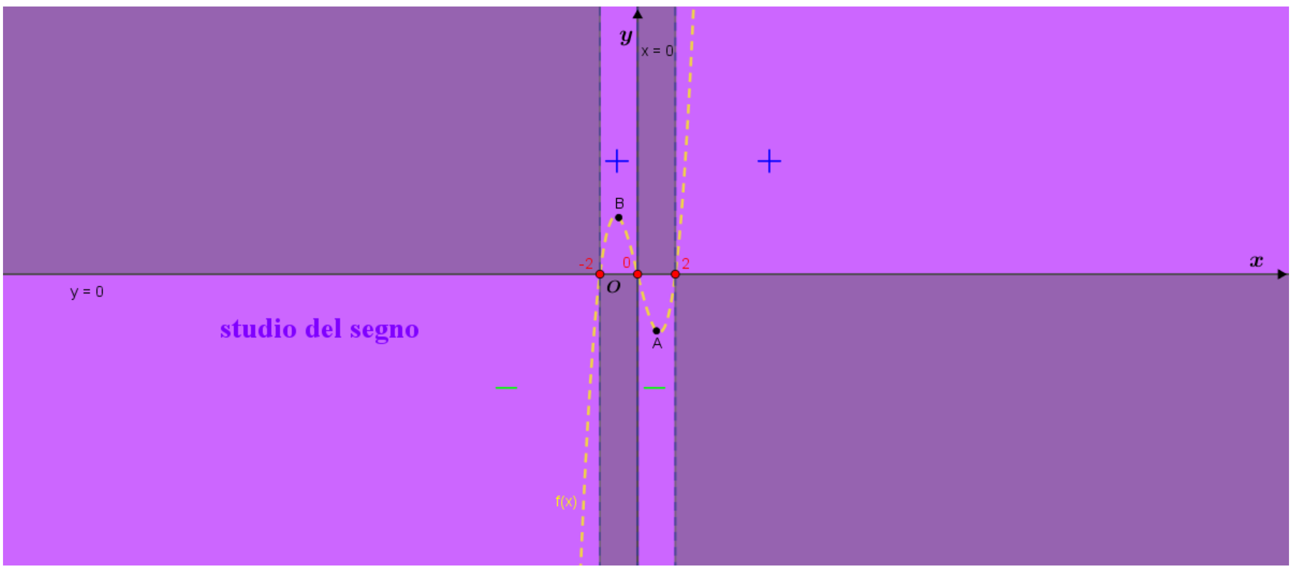
secondo fattore: $x^2-4\geq 0 \rightarrow x\leq -2\,, x\geq 2$ (il binomio è positivo per i valori esterni dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]-2\,;0[$ e $]2\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;-2[$ e $]0\,;2[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x=-2$, $x=0$ e $x=2$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



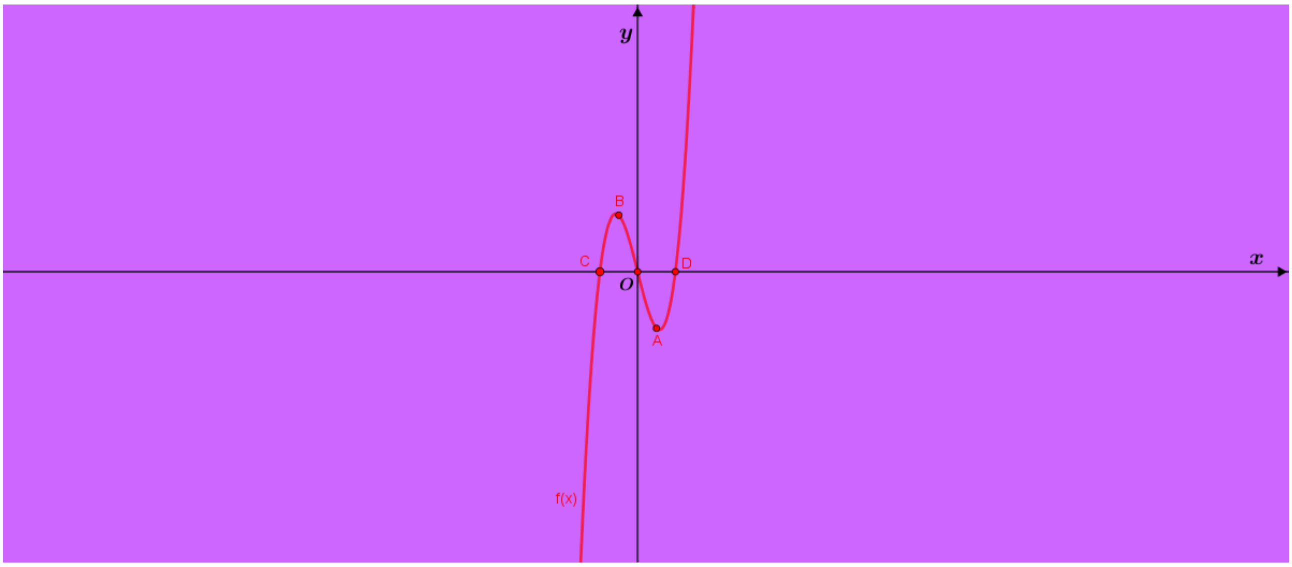
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow C(-2;0),\ \ D(2;0)\ e\ O(0;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 4x \\ x = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow O(0;0)$$

Grafico:



F) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = x^3 - 8}$$

stabilire:

1) **Classificazione e Dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale intera di terzo grado (parabola cubica pura), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $x^3 - y - 8 = 0$.

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = x^3 - 8$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = -x^3 - 8 \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;-7)$ e $B(-1\,;-9)$ sono punti del grafico non simmetrici.

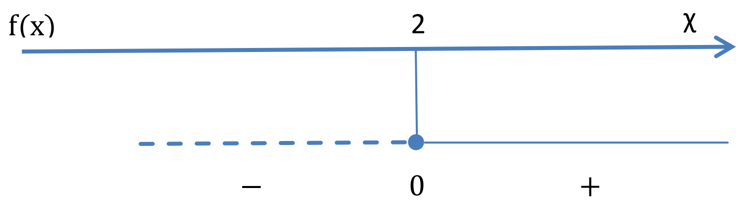
Studio del segno: si pone

$$x^3 - 8 \geq 0$$

pertanto, ha senso scrivere

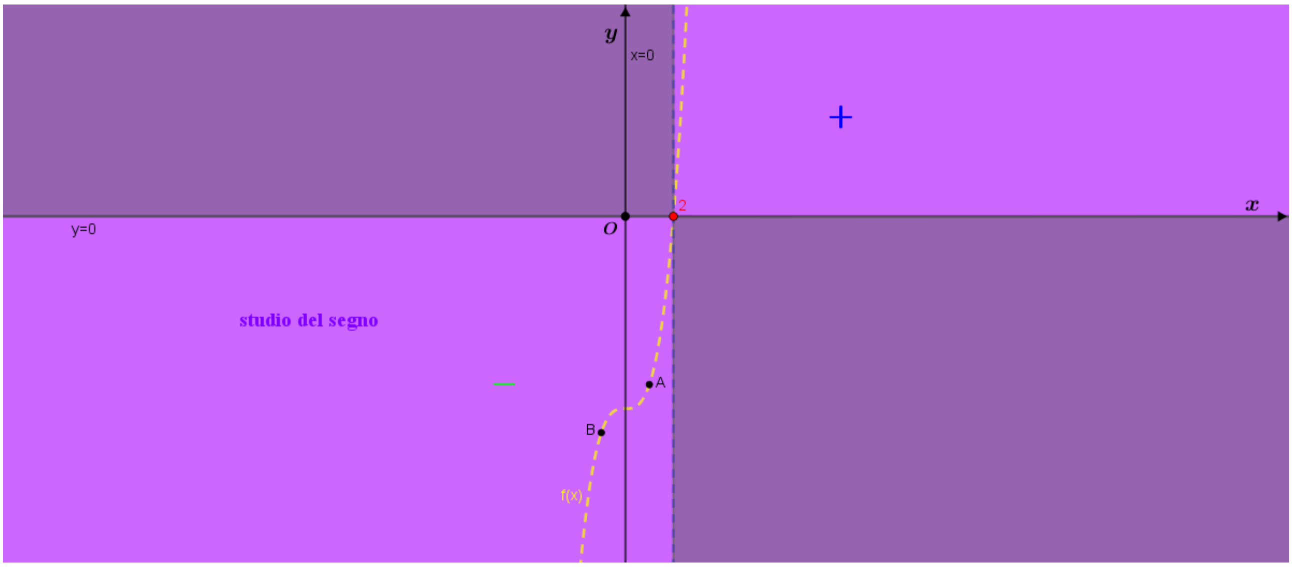
$$x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene



la funzione è positiva nell'intervallo aperto $]2\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]-\infty\,;-2[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x = 2$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



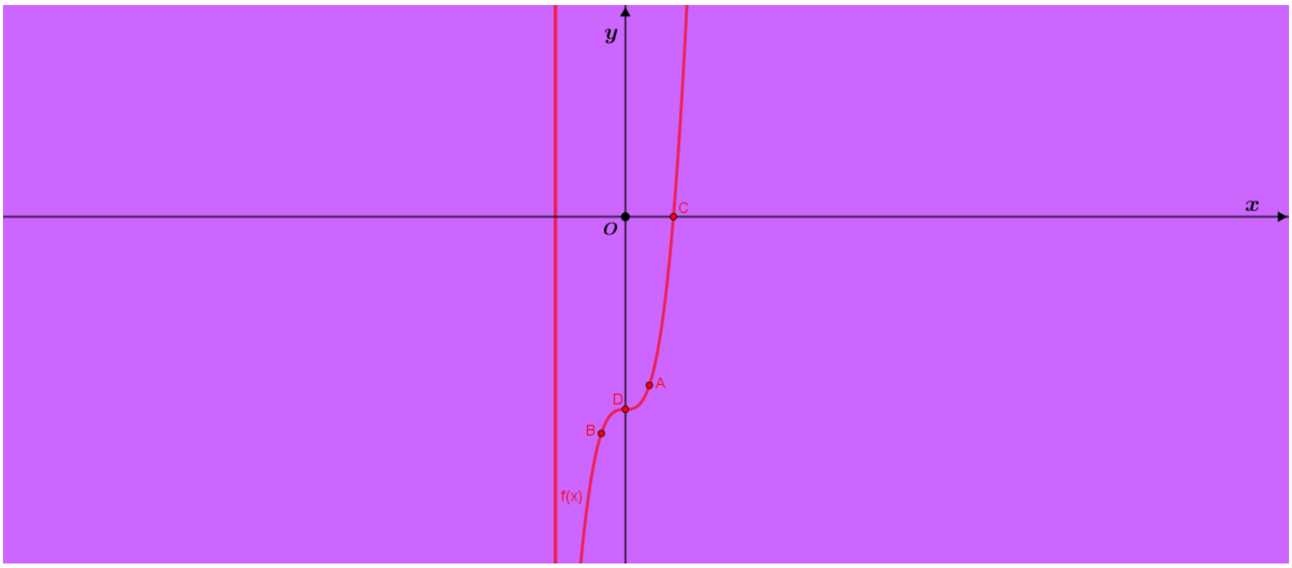
Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si trovano i punti d'intersezione con l'asse x

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow C(2;0)$$

mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si determina il punto d'intersezione con l'asse y

$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 8 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow D(0;-8)$$

Grafico:



TORNA SU