A) Data la funzione

$$y = \frac{3x - 6}{x + 1}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $xy - 3x + y + 6 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-3x-6}{-x+1} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A\left(3\,;\frac{3}{4}\right)$ e $B\left(-3\,;\frac{15}{2}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

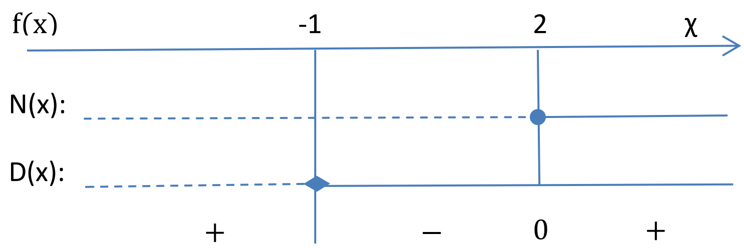
Studio del segno: si pone

$$\frac{3x - 6}{x + 1} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

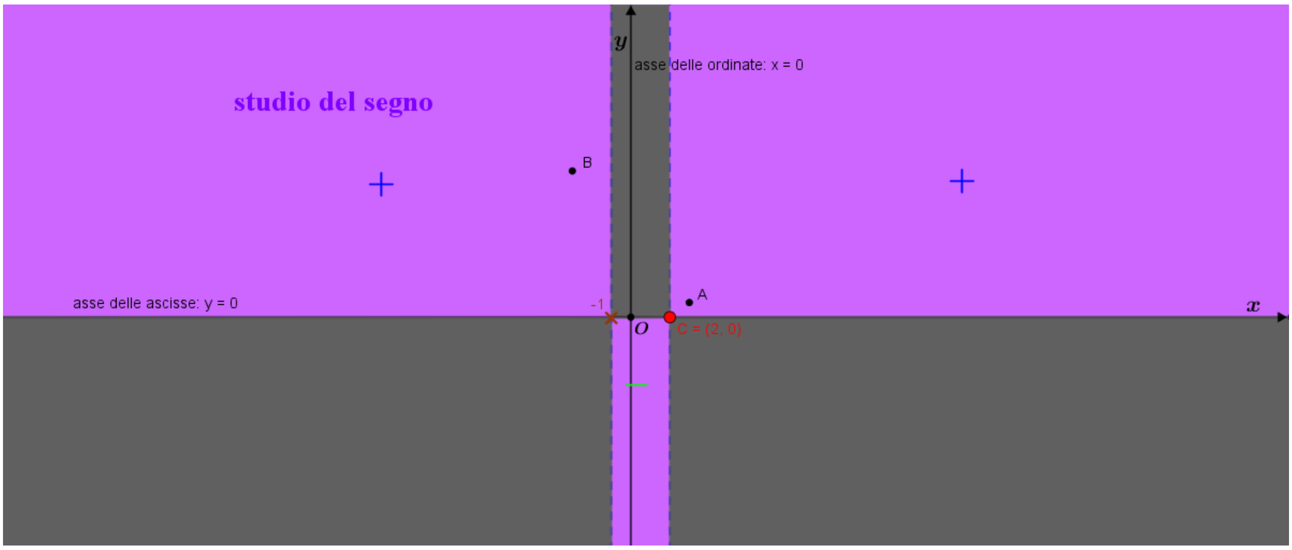
$N(x)$: $3x - 6 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$
$D(x)$: $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]-\infty\,;-1[\;\; e \;\;]2\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]-1\,;2[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x = 2$, infine è asintotica verticalmente per $x = -1$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(2\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;-6)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x = -\frac{d}{c} \rightarrow x = -1$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y = \frac{a}{c} \rightarrow y = 3$$

Infatti

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{3x-6}{x+1} = \frac{-}{0^-} = +\infty \;\; e \;\; \lim_{x\to -1^+} \frac{3x-6}{x+1} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x = -1$, la funzione data per $x_0 = -1$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-6}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}\; f.i. \quad \begin{array}{l} \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-6}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3^- \\ \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-6}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3^+ \end{array}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y = 3$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x)=\frac{3x-6}{x+1}}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{N'(x)D(x)-N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

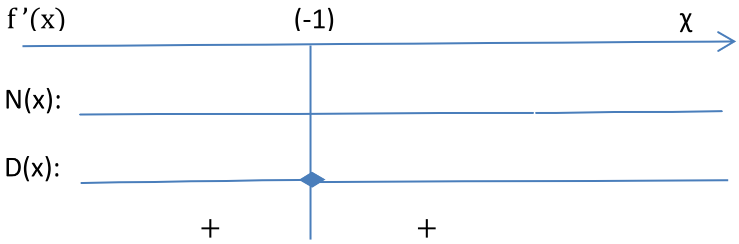
$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{3(x+1)-1(3x-6)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+6}{(x+1)^2}=\frac{9}{(x+1)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\boldsymbol{\frac{9}{(x+1)^2}>0}$$

$N(x)\colon\ 9>0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x)\colon\ (x+1)^2>0\rightarrow\forall x\in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre positiva nel dominio allora la funzione data è sempre crescente dove è definita, ossia $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ è $crescente\ \forall x\in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{9}{(x+1)^2}=\frac{9}{x^2+1+2x}}$$

ha senso scrivere

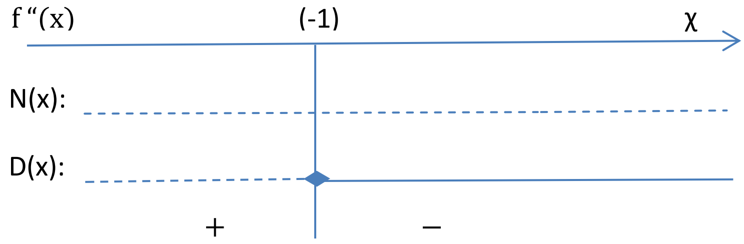
$$\boldsymbol{f''(x)=\frac{0(x^2+1+2x)-9(2x+2)}{[(x+1)^2]^2}=\frac{-9\times 2(x+1)}{(x+1)^4}=-\frac{18(x+1)}{(x+1)^4}=-\frac{18}{(x+1)^3}}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\boldsymbol{-\frac{18}{(x+1)^3}>0}$$

$N(x)\colon -18<0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x)\colon\ (x+1)^3>0\rightarrow x+1>0\rightarrow x>-1$

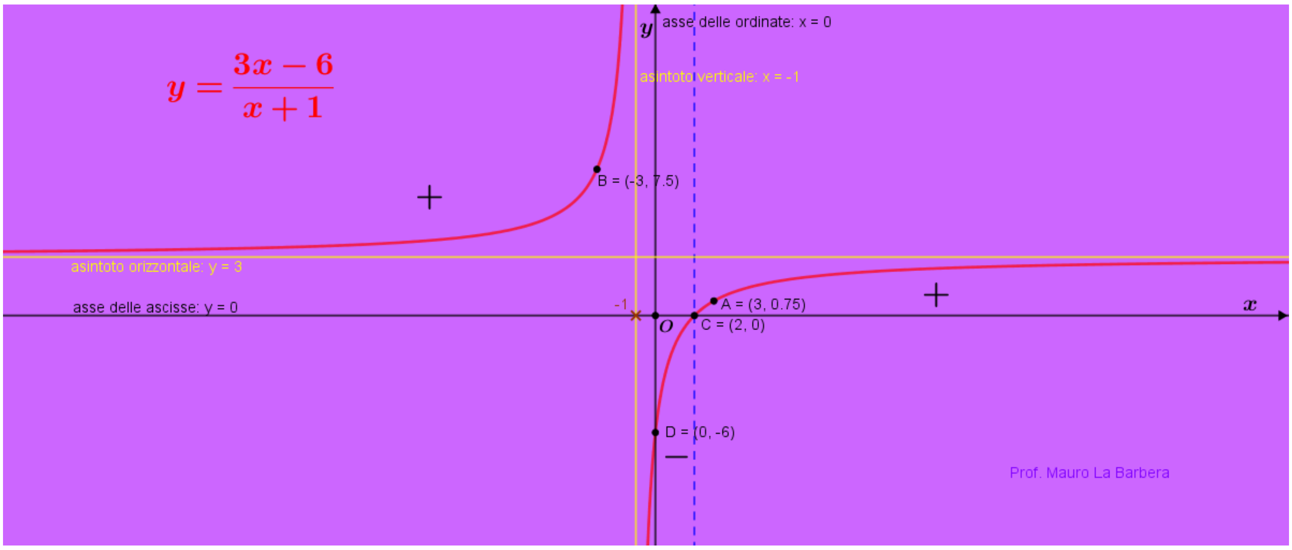
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]-\infty\,;-1[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto, mentre la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]-1\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



[Torna su]

B) Data la funzione

$$y = \frac{x+6}{2x-6}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $2xy - x - 6y - 6 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\ 3[\cup]3\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{x+6}{2x-6}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-x+6}{-2x-6} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A\left(1\,;-\frac{7}{4}\right)$ e $B\left(-1\,;-\frac{5}{8}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

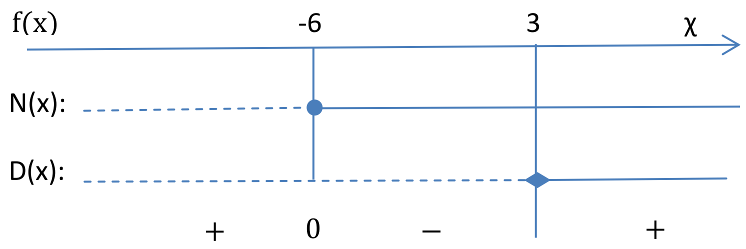
Studio del segno: si pone

$$\frac{x+6}{2x-6} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

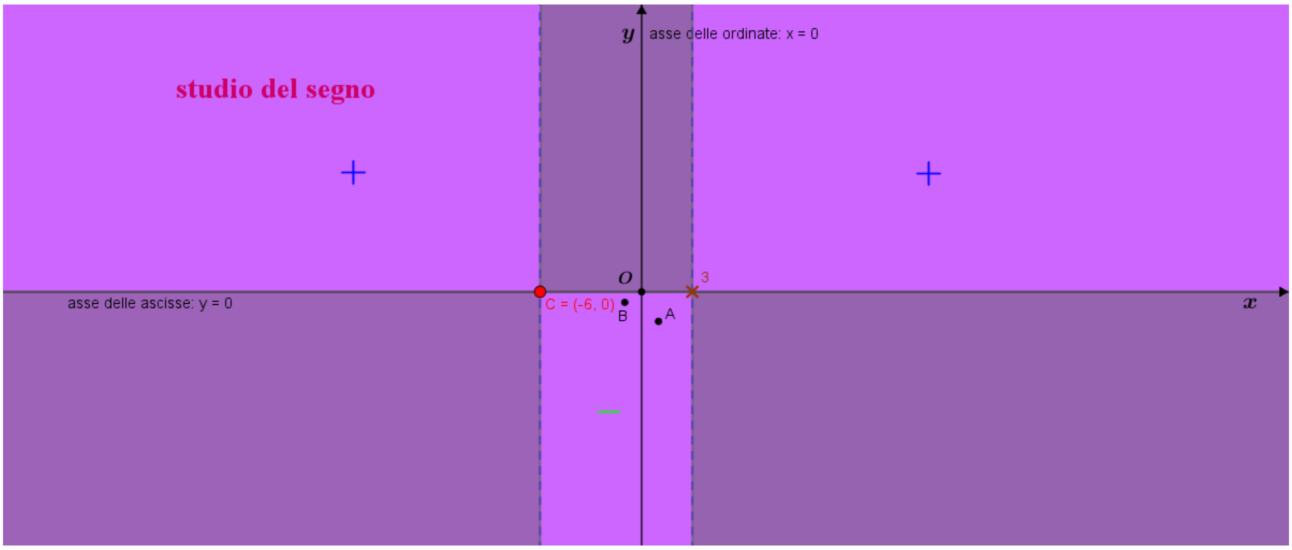
$N(x):\ x + 6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6$
$D(x):\ \ 2x - 6 > 0 \rightarrow x > 3$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli $]-\infty\,;-6[\ e\ ]3\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]-6\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=-6$, infine è asintotica verticalmente per $x=3$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(-6\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;-1)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x=-\frac{d}{c}\ \rightarrow\ x=3$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y=\frac{a}{c}\rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{+}{0^-}=-\infty\ \ e\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x=3$, la funzione data per $x_0=3$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}\ f.i.\ \begin{cases}\rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^+\\[2ex] \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^-\end{cases}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y=\frac{1}{2}$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x+6}{2x-6}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}$$

si ottiene

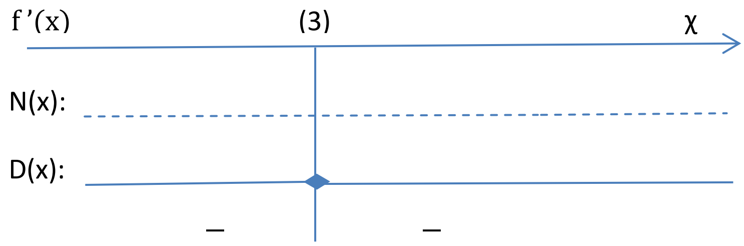
$$f'(x) = \frac{1(2x-6) - 2(x+6)}{(2x-6)^2} = \frac{2x-6-2x-12}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{(2x-6)^2}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\frac{-18}{(2x-6)^2} > 0$$

$N(x): -18 < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ (2x-6)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre negativa nel dominio allora la funzione data è sempre decrescente dove è definita, ossia $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ è $decrescente\ \forall x \in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$f'(x) = \frac{-18}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{4x^2+36-24x}$$

ha senso scrivere

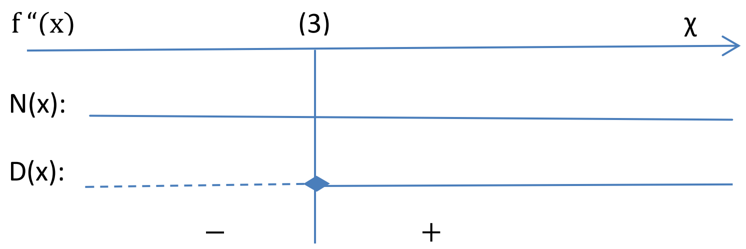
$$f''(x) = \frac{0(4x^2+36-24x) + 18(8x-24)}{[(2x-6)^2]^2} = \frac{18 \times 8(x-3)}{(2x-6)^4} = \frac{144(x-3)}{16(x-3)^4} = \frac{9}{(x-3)^3}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\frac{9}{(x-3)^3} > 0$$

$N(x): 9 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ (x-3)^3 > 0 \rightarrow x-3 > 0 \rightarrow x > 3$

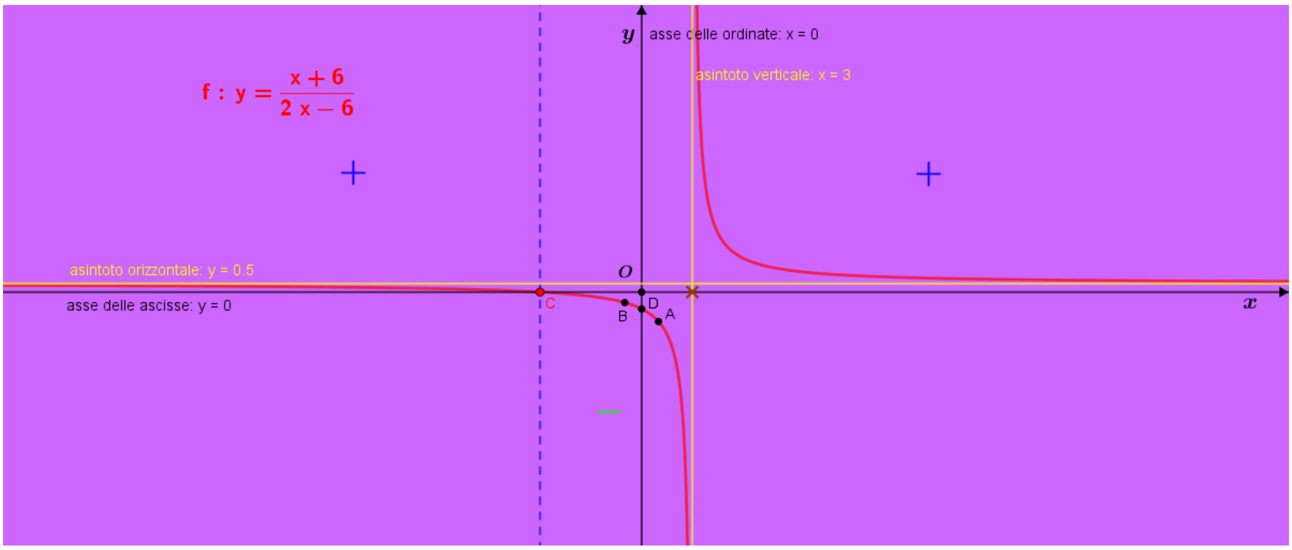
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]-\infty\,;3[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso, mentre la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]3\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su

C) Data la funzione

$$y = \frac{4x - 12}{x - 2}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $xy - 4x - 2y + 12 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\ 2[\cup]2\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{4x-12}{x-2}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-4x-12}{-x-2} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;8)\ e\ B\left(-1\,;\frac{16}{3}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

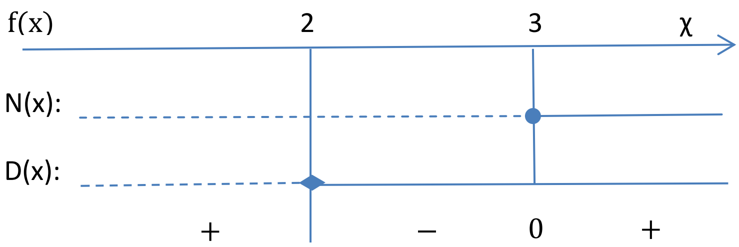
Studio del segno: si pone

$$\frac{4x - 12}{x - 2} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

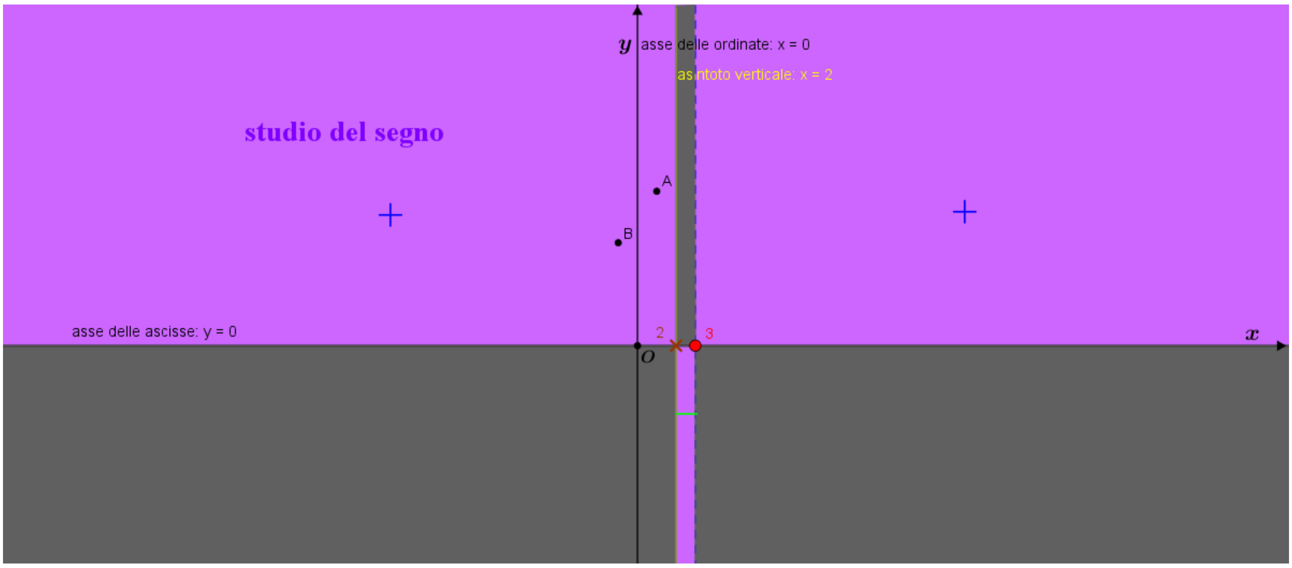
$N(x):\ 4x - 12 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$
$D(x):\quad x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli $]-\infty\,;2[\ \ e\ \ ]3\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]2\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=3$, infine è asintotica verticalmente per $x=2$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(3\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;6)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x=-\frac{d}{c}\ \rightarrow\ x=2$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y=\frac{a}{c}\rightarrow y=4$$

Infatti

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x-12}{x-2}=\frac{-}{0^-}=+\infty\ \ e\ \lim_{x\to 2^+}\frac{4x-12}{x-2}=\frac{-}{0^+}=-\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x=2$, la funzione data per $x_0=2$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-12}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}\,f.i.\ \begin{cases}\rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=4^-\\[2ex]\rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=4^+\end{cases}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y=4$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x)=\frac{4x-12}{x-2}}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{N'(x)D(x)-N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

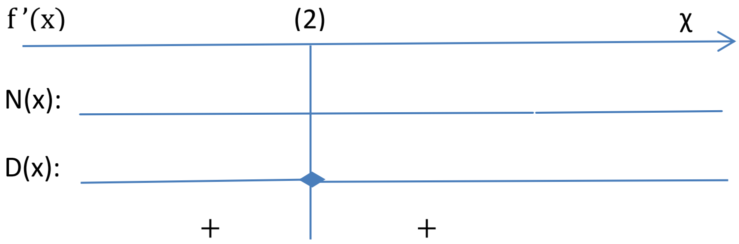
$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{4(x-2)-1(4x-12)}{(x-2)^2}=\frac{4x-8-4x+12}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-2)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\boldsymbol{\frac{4}{(x-2)^2}>0}$$

$N(x)\colon\ 4>0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x)\colon\ (x-2)^2>0\rightarrow\forall x\in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre positiva nel dominio allora la funzione data è sempre crescente dove è definita, ossia $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ è $crescente\ \forall x\in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{4}{x^2+4-4x}}$$

ha senso scrivere

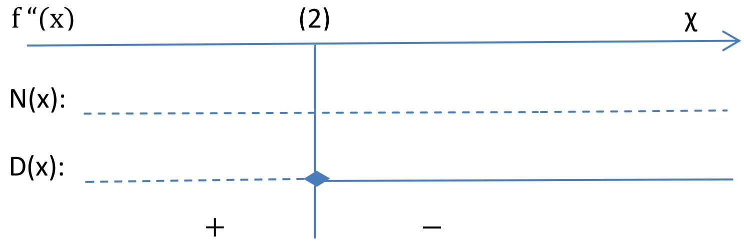
$$\boldsymbol{f''(x)=\frac{0\left(x^2+4-4x\right)-4(2x-4)}{[(x-2)^2]^2}=\frac{-4\times2(x-2)}{(x-2)^4}=-\frac{8(x-2)}{(x-2)^4}=-\frac{8}{(x-2)^3}}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\boldsymbol{-\frac{8}{(x-2)^3}>0}$$

$N(x)\colon -8<0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x)\colon\ (x-2)^3>0\rightarrow x-2>0\rightarrow x>2$

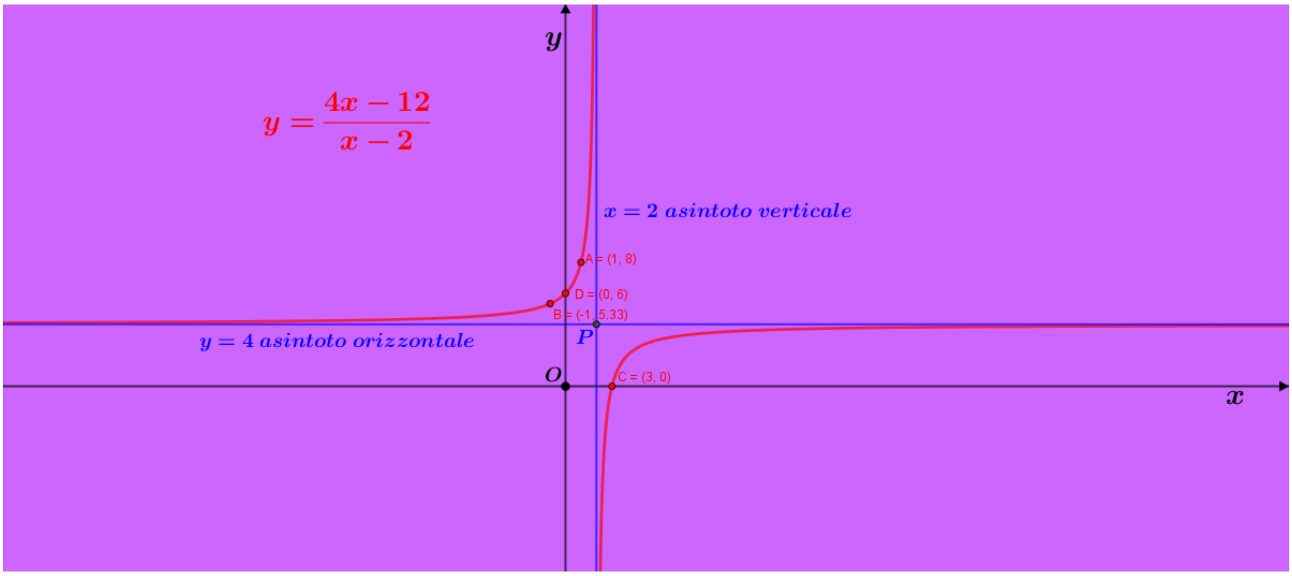
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]-\infty\,;2[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto, mentre la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]2\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su

D) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = \frac{4x - 8}{-x + 1}}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $-xy - 4x + y + 8 = 0 \ \rightarrow xy + 4x - y - 8 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$\boldsymbol{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\, ;\ 1[\cup]1\, ; +\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{4x-8}{-x+1}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-4x-8}{x+1} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(3; -2)\ e\ B(-3\, ; -5)$ sono punti del grafico non simmetrici.

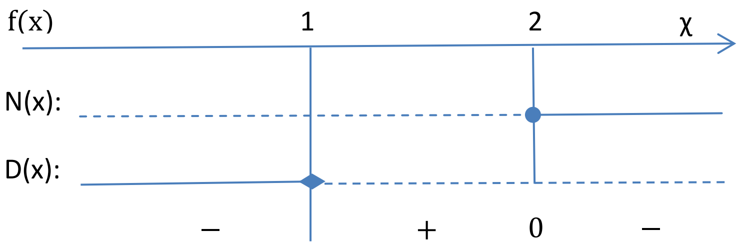
Studio del segno: si pone

$$\frac{4x - 8}{-x + 1} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

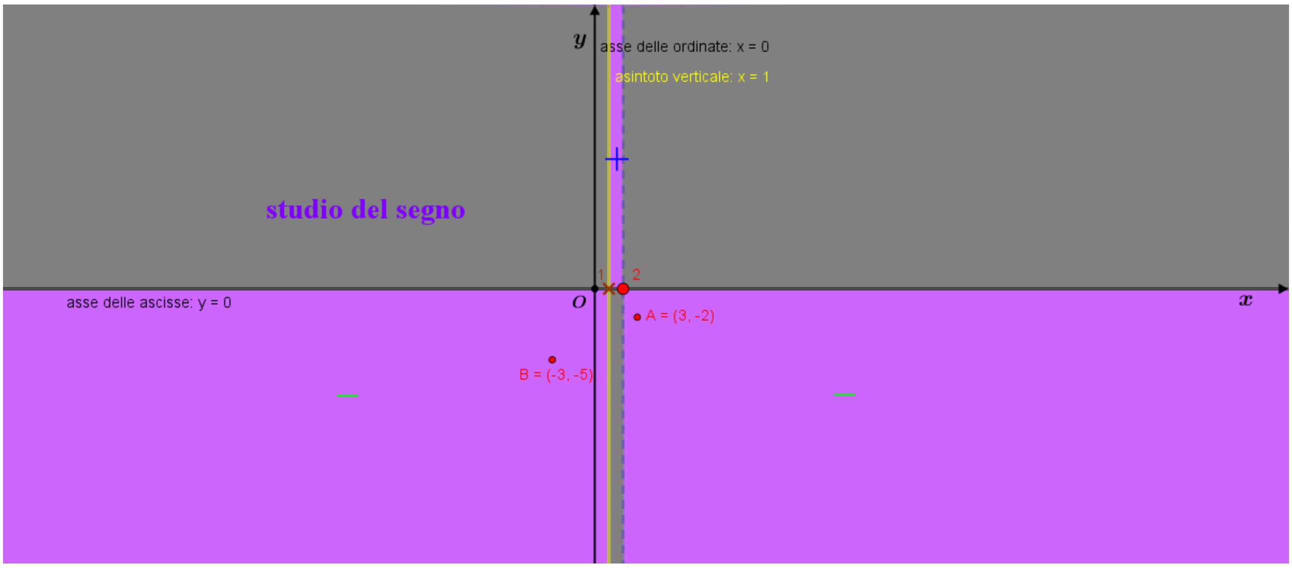
$$N(x): \quad 4x - 8 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 8 \rightarrow x \geq 2$$
$$D(x): -x + 1 > 0 \rightarrow -x > -1 \rightarrow x < 1$$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è negativa negli intervalli $]-\infty\,;1[\;\; e \;\;]2\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]1\,;2[$ la funzione è positiva, risulta essere nulla per $x = 2$, infine è asintotica verticalmente per $x = 1$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(2\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;-8)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x = -\frac{d}{c} \rightarrow x = 1$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y = \frac{a}{c} \rightarrow y = -4$$

Infatti

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x-8}{-x+1} = \frac{-}{0^+} = -\infty \;\; e \;\; \lim_{x\to 1^+} \frac{4x-8}{-x+1} = \frac{-}{0^-} = +\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x = 1$, la funzione data per $x_0 = 1$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-8}{-x+1} = \frac{\infty}{\infty}\, f.i. \quad \begin{cases} \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-8}{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4-\frac{8}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = -4^+ \\ \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-8}{-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4-\frac{8}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = -4^- \end{cases}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y = -4$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $f(x)=\frac{4x-8}{-x+1}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$f'(x)=\frac{N'(x)D(x)-N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}$$

si ottiene

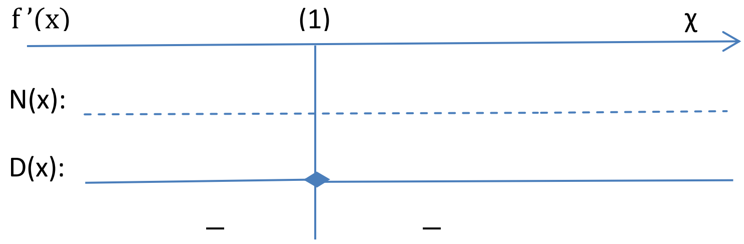
$$f'(x)=\frac{4(-x+1)-(-1)(4x-8)}{(-x+1)^2}=\frac{-4x+4+4x-8}{(-x+1)^2}=\frac{-4}{(-x+1)^2}=-\frac{4}{(-x+1)^2}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$-\frac{4}{(-x+1)^2}>0$$

$N(x):-4<0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x):\ (-x+1)^2>0\rightarrow\forall x\in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre negativa nel dominio allora la funzione data è sempre decrescente dove è definita, ossia $f'(x)<0\rightarrow f(x)\ \text{è}\ decrescente\ \forall x\in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$f'(x)=\frac{-4}{(-x+1)^2}=\frac{-4}{x^2+1-2x}$$

ha senso scrivere

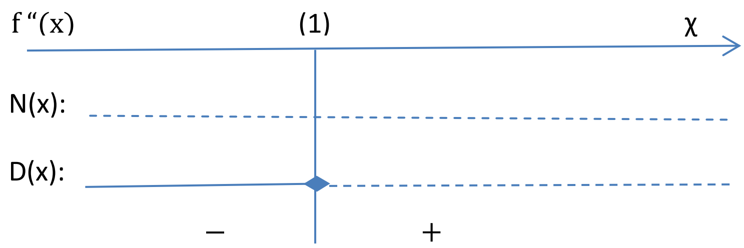
$$f''(x)=\frac{0(x^2+1-2x)+4(2x-2)}{[(-x+1)^2]^2}=\frac{4\times 2(x-1)}{(-x+1)^4}=\frac{8(x-1)}{(-x+1)^4}=\frac{-8(-x+1)}{(-x+1)^4}=\frac{-8}{(-x+1)^3}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\frac{-8}{(-x+1)^3}>0$$

$N(x):-8<0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$
$D(x):\ (-x+1)^3>0\rightarrow -x+1>0\rightarrow -x>-1\rightarrow x<1$

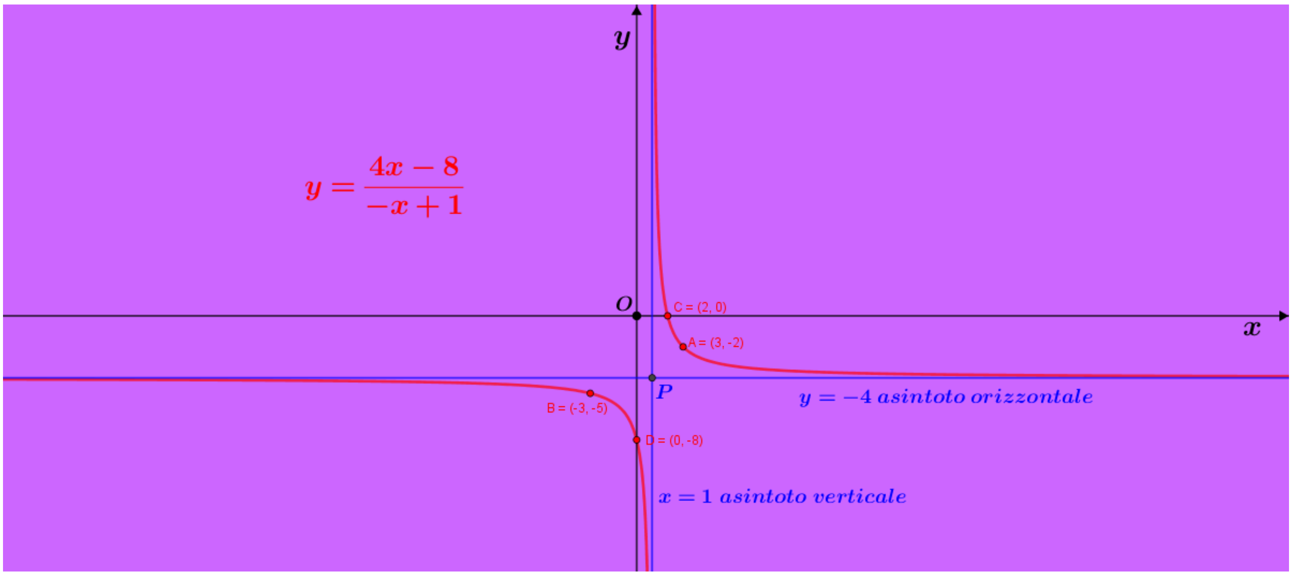
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]-\infty\,;1[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso, mentre la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]1\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su