B) Data la funzione

$$y = \frac{x+6}{2x-6}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $2xy - x - 6y - 6 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{x+6}{2x-6}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-x+6}{-2x-6} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A\left(1\,;-\frac{7}{4}\right)$ e $B\left(-1\,;-\frac{5}{8}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

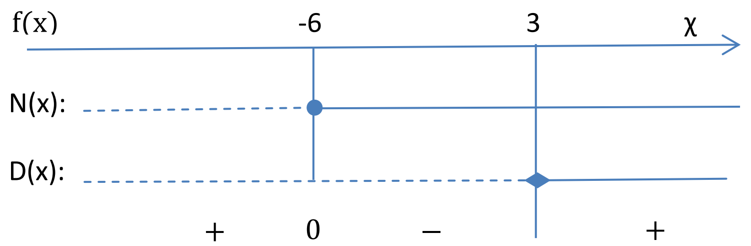
Studio del segno: si pone

$$\frac{x+6}{2x-6} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

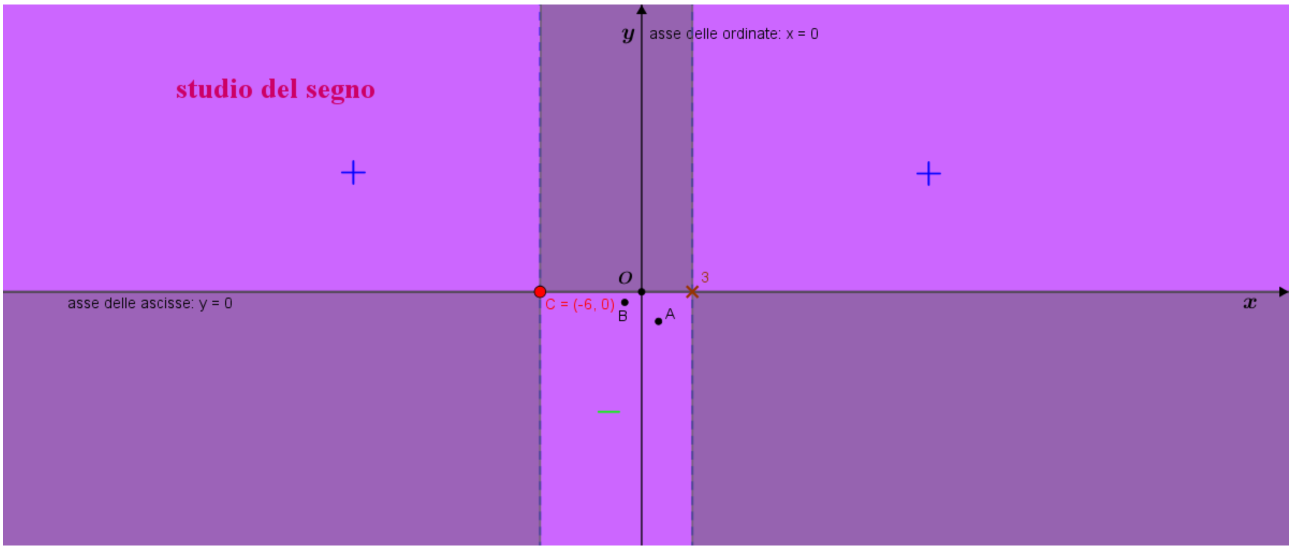
$N(x)$: $x + 6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6$
$D(x)$: $2x - 6 > 0 \rightarrow x > 3$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli $]-\infty\,;-6[\ e\ ]3\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]-6\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=-6$, infine è asintotica verticalmente per $x=3$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(-6\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;-1)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x=-\frac{d}{c}\ \rightarrow\ x=3$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y=\frac{a}{c}\rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{+}{0^-}=-\infty\ \ e\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{+}{0^+}=+\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x=3$, la funzione data per $x_0=3$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\frac{\infty}{\infty}\ f.i.\ \begin{cases}\rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^+\\[2ex] \rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+6}{2x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{6}{x}\right)}{x\left(2-\frac{6}{x}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^-\end{cases}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+6}{2x-6}}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

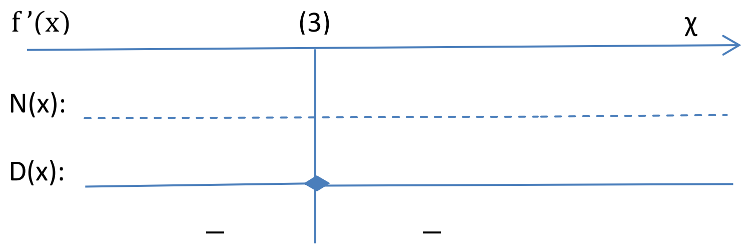
$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1(2x-6) - 2(x+6)}{(2x-6)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 12}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{(2x-6)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\boldsymbol{\frac{-18}{(2x-6)^2} > 0}$$

$N(x): -18 < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ \ (2x-6)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre negativa nel dominio allora la funzione data è sempre decrescente dove è definita, ossia $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ è $decrescente\ \forall x \in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-18}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{4x^2 + 36 - 24x}}$$

ha senso scrivere

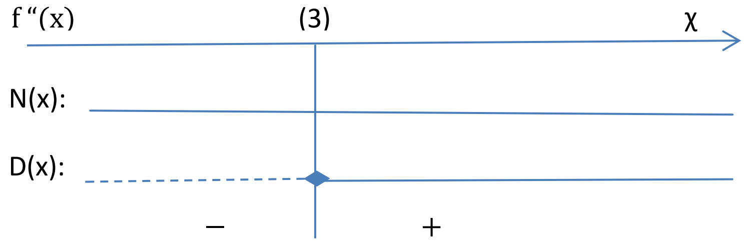
$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{0\left(4x^2 + 36 - 24x\right) + 18(8x - 24)}{[(2x-6)^2]^2} = \frac{18 \times 8(x-3)}{(2x-6)^4} = \frac{144(x-3)}{16(x-3)^4} = \frac{9}{(x-3)^3}}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\boldsymbol{\frac{9}{(x-3)^3} > 0}$$

$N(x): 9 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ \ (x-3)^3 > 0 \rightarrow x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$

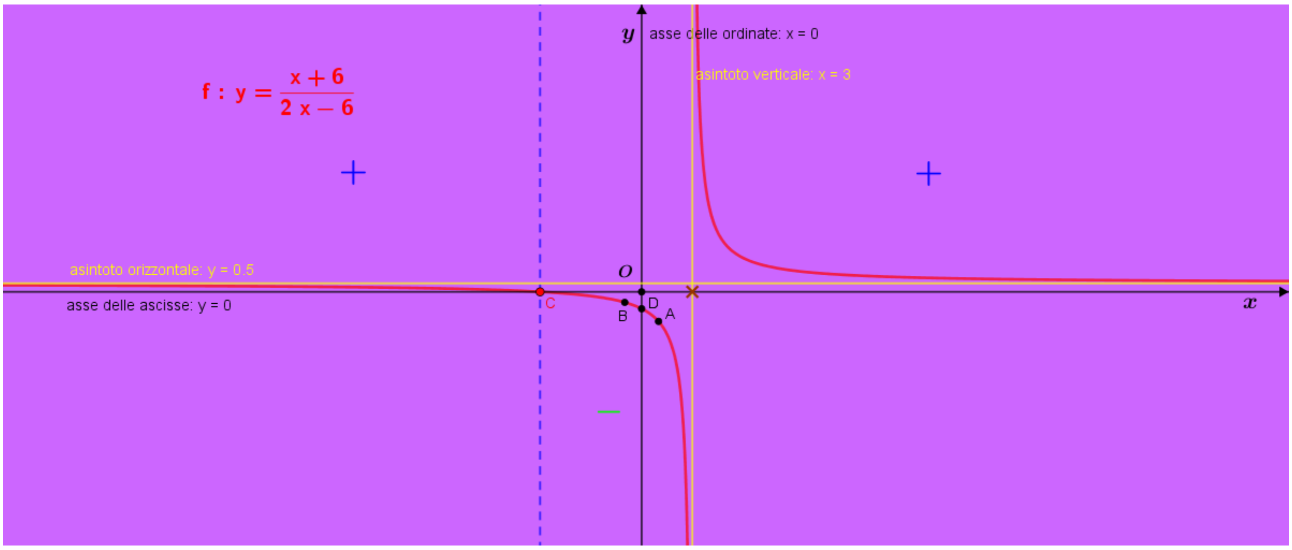
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]-\infty\,;3[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso, mentre la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]3\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su