C) Data la funzione

$$\boldsymbol{y=\frac{4x-12}{x-2}}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $xy-4x-2y+12=0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$\boldsymbol{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\ 2[\cup]2\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x)=\frac{4x-12}{x-2}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x)=\frac{-4x-12}{-x-2}\neq\pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;8)$ e $B\left(-1\,;\frac{16}{3}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

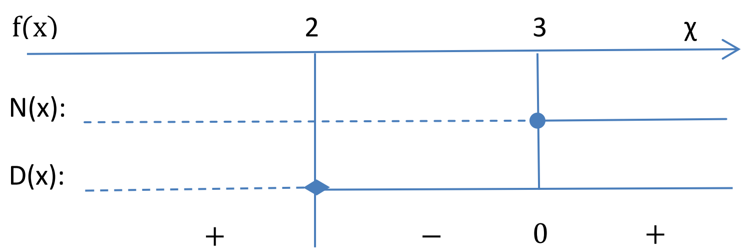
Studio del segno: si pone

$$\frac{4x-12}{x-2}\geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

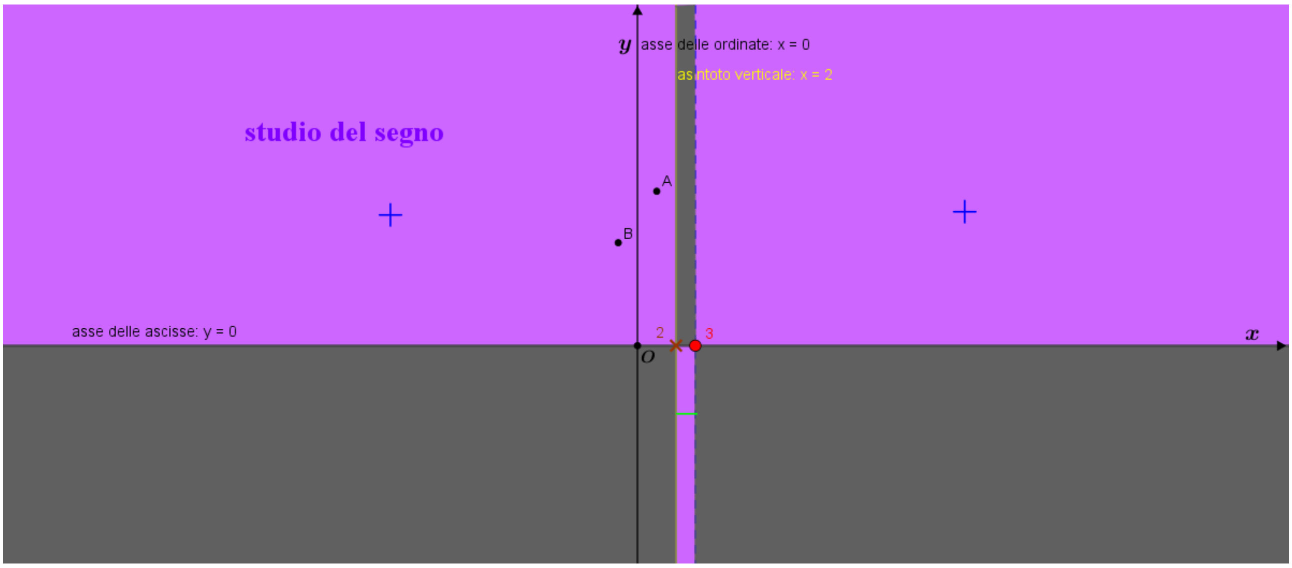
$$\begin{aligned}&N(x):\ 4x-12\geq 0\rightarrow x\geq 3\\&D(x):\quad\ x-2>0\rightarrow x>2\end{aligned}$$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli $]-\infty\,;2[\ e\ ]3\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]2\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x = 3$, infine è asintotica verticalmente per $x = 2$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(3\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;6)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x = -\frac{d}{c} \rightarrow x = 2$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y = \frac{a}{c} \rightarrow y = 4$$

Infatti

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x-12}{x-2} = \frac{-}{0^-} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-12}{x-2} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x = 2$, la funzione data per $x_0 = 2$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-12}{x-2} = \frac{\infty}{\infty}\ f.i. \begin{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-12}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 4^- \\ \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-12}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 4^+ \end{cases}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y = 4$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{4x-12}}{\boldsymbol{x-2}}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}}{\boldsymbol{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

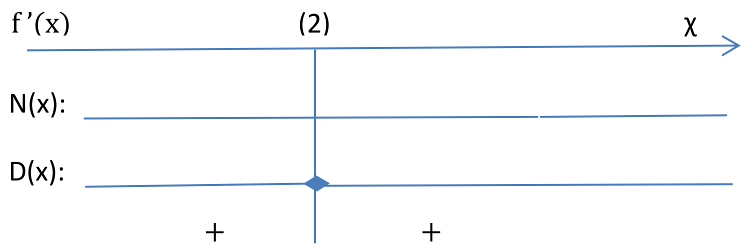
$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{4(x-2) - 1(4x-12)}}{\boldsymbol{(x-2)^2}} = \frac{\boldsymbol{4x - 8 - 4x + 12}}{\boldsymbol{(x-2)^2}} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{(x-2)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{(x-2)^2}} > \boldsymbol{0}$$

$N(x)$: $4 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x)$: $(x-2)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre positiva nel dominio allora la funzione data è sempre crescente dove è definita, ossia $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ è $crescente\ \forall x \in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{(x-2)^2}} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x^2 + 4 - 4x}}$$

ha senso scrivere

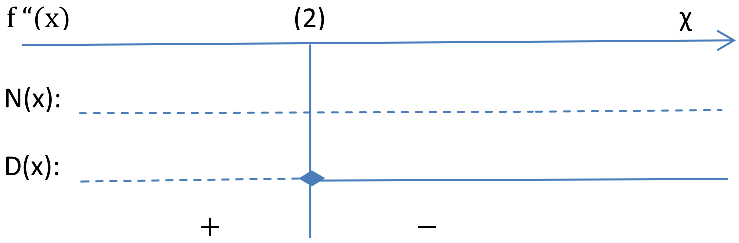
$$\boldsymbol{f''(x)} = \frac{\boldsymbol{0(x^2 + 4 - 4x) - 4(2x-4)}}{\boldsymbol{[(x-2)^2]^2}} = \frac{\boldsymbol{-4 \times 2(x-2)}}{\boldsymbol{(x-2)^4}} = -\frac{\boldsymbol{8(x-2)}}{\boldsymbol{(x-2)^4}} = -\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{(x-2)^3}}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$-\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{(x-2)^3}} > \boldsymbol{0}$$

$N(x): -8 < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x)$: $(x-2)^3 > 0 \rightarrow x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

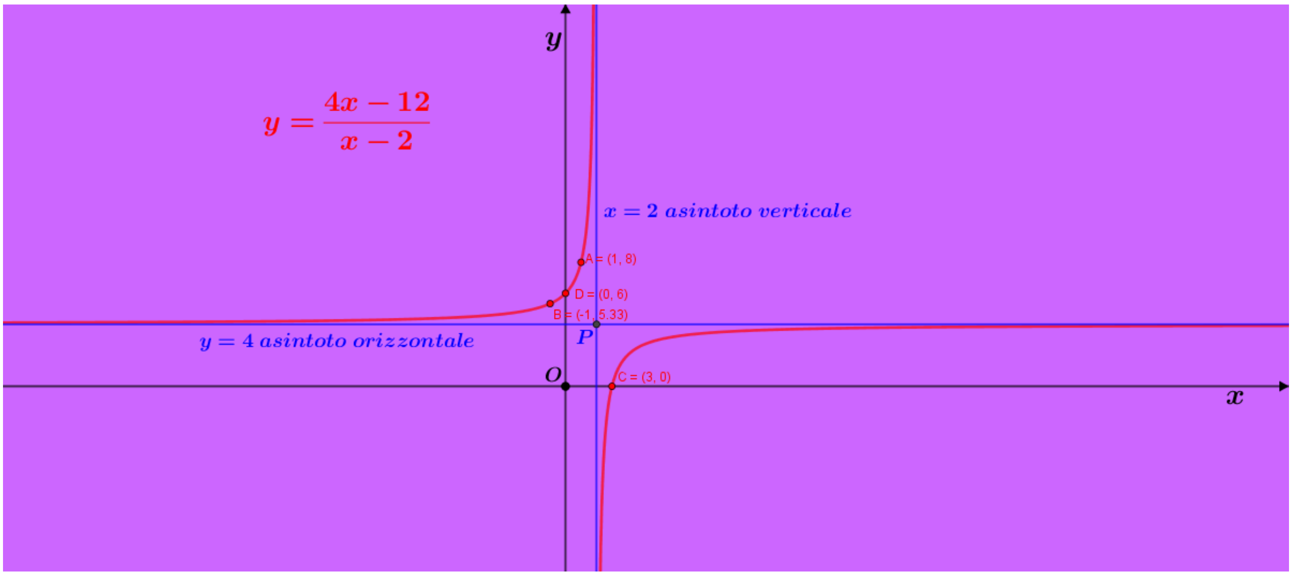
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è positiva nell’intervallo $]-\infty\,;2[$, ivi, la funzione data è concava verso l’alto, mentre la derivata seconda è negativa nell’intervallo $]2\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su