D) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = \frac{4x - 8}{-x + 1}}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $-xy - 4x + y + 8 = 0 \;\rightarrow\; xy + 4x - y - 8 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$\boldsymbol{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\;1[\cup]1\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{4x-8}{-x+1}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-4x-8}{x+1} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(3; -2)$ e $B(-3\,; -5)$ sono punti del grafico non simmetrici.

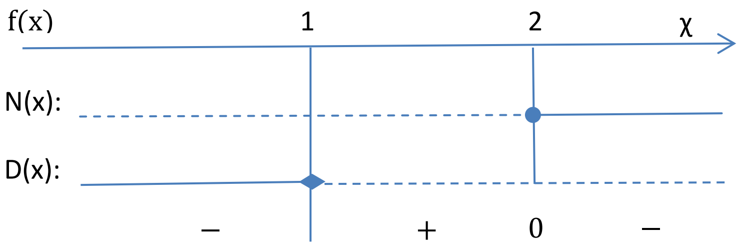
Studio del segno: si pone

$$\frac{4x - 8}{-x + 1} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

$N(x)$: $\quad 4x - 8 \geq 0 \rightarrow 4x \geq 8 \rightarrow x \geq 2$
$D(x)$: $-x + 1 > 0 \rightarrow -x > -1 \rightarrow x < 1$

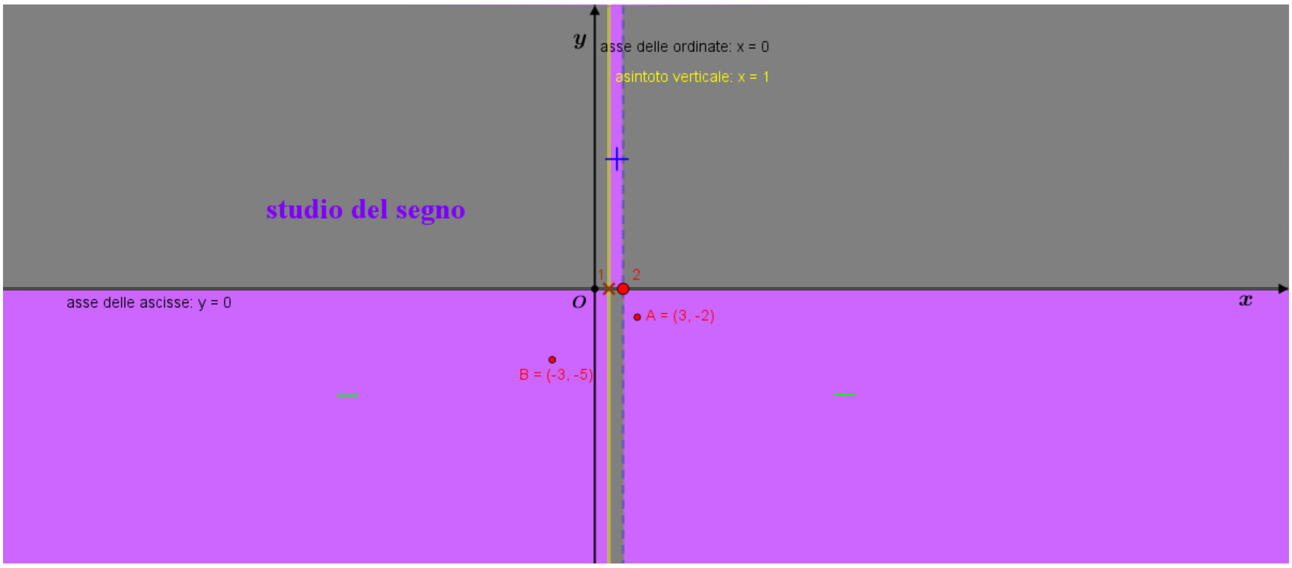
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Prof. Mauro La Barbera

la funzione è negativa negli intervalli $]-\infty\,;1[\ \ e\ \ ]2\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]1\,;2[$ la funzione è positiva, risulta essere nulla per $x=2$, infine è asintotica verticalmente per $x=1$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(2\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;-8)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

$$x=-\frac{d}{c}\ \rightarrow\ x=1$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y=\frac{a}{c}\rightarrow y=-4$$

Infatti

$$\lim_{x\to1^-}\frac{4x-8}{-x+1}=\frac{-}{0^+}=-\infty\ \ e\ \lim_{x\to1^+}\frac{4x-8}{-x+1}=\frac{-}{0^-}=+\infty$$

quindi la curva è asintotica verticalmente alla retta di equazione $x=1$, la funzione data per $x_0=1$ presenta un punto di discontinuità (singolarità) di seconda specie.
Inoltre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-8}{-x+1}=\frac{\infty}{\infty}\ f.i.\quad \begin{array}{l}\rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-8}{-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\frac{8}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}=-4^+\\[2ex] \rightarrow\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-8}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\frac{8}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}=-4^-\end{array}$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y = -4$.

Crescenza e/o decrescenza: si calcola la derivata prima della funzione $\boldsymbol{f(x) = \frac{4x-8}{-x+1}}$, ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

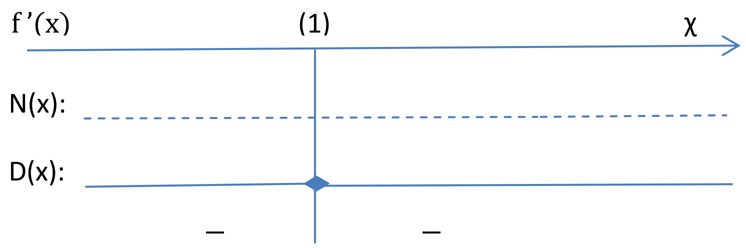
$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{4(-x+1) - (-1)(4x-8)}{(-x+1)^2} = \frac{-4x+4+4x-8}{(-x+1)^2} = \frac{-4}{(-x+1)^2} = -\frac{4}{(-x+1)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

$$\boldsymbol{-\frac{4}{(-x+1)^2} > 0}$$

$N(x): -4 < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ \ (-x+1)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima sempre negativa nel dominio allora la funzione data è sempre decrescente dove è definita, ossia $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ è $decrescente\ \forall x \in Dom(f)$.

Punti stazionari: poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale.

Concavità e/o convessità: si calcola la derivata seconda della funzione, ossia applicando la regola della derivata del quoziente alla derivata prima e osservando che

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-4}{(-x+1)^2} = \frac{-4}{x^2+1-2x}}$$

ha senso scrivere

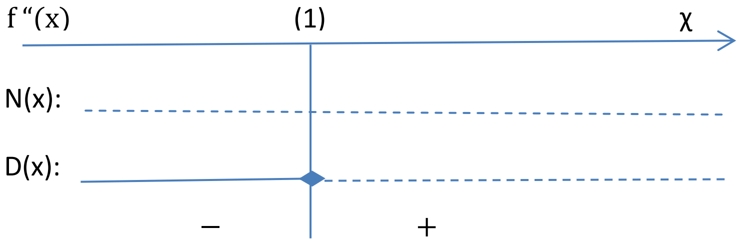
$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{0(x^2+1-2x) + 4(2x-2)}{[(-x+1)^2]^2} = \frac{4 \times 2(x-1)}{(-x+1)^4} = \frac{8(x-1)}{(-x+1)^4} = \frac{-8(-x+1)}{(-x+1)^4} = \frac{-8}{(-x+1)^3}}$$

Per studiare il segno della derivata seconda si pone

$$\boldsymbol{\frac{-8}{(-x+1)^3} > 0}$$

$N(x): -8 < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
$D(x):\ \ (-x+1)^3 > 0 \rightarrow -x+1 > 0 \rightarrow -x > -1 \rightarrow x < 1$

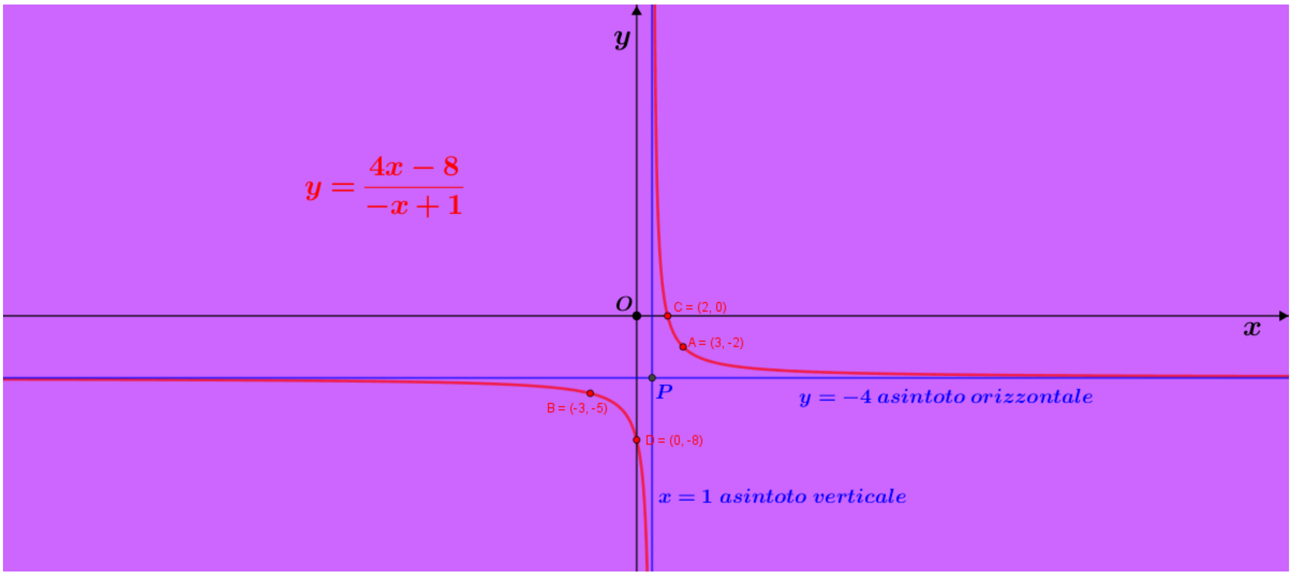
Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la derivata seconda è negativa nell'intervallo $]-\infty\,;1[$, ivi, la funzione data è concava verso il basso, mentre la derivata seconda è positiva nell'intervallo $]1\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è concava verso l'alto.

Punti non stazionari: poiché la derivata seconda non si annulla non esistono punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Torna su