C) Data la funzione

$$\boldsymbol{y = \frac{4x - 12}{x - 2}}$$

stabilire:

1) **Classificazione e dominio**
2) **Simmetrie**
3) **Studio del segno**
4) **Intersezioni con gli assi cartesiani**
5) **Asintoti**
6) **Crescenza e/o decrescenza**
7) **Punti stazionari**
8) **Concavità e/o convessità**
9) **Punti non stazionari**
10) **Grafico**

Classificazione: funzione algebrica razionale fratta di secondo grado (omografica), scritta in forma esplicita, mentre la sua forma implicita è $xy - 4x - 2y + 12 = 0$. Si osserva che la forma canonica della funzione omografica è

$$\boldsymbol{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$$

Dominio: funzione definita su tutto l'asse reale ad eccezione del valore che annulla il denominatore, ossia $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ (simbologia insiemistica), oppure $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;+\infty[$ (simbologia topologica).

Simmetrie: si pone $f(x) = \frac{4x-12}{x-2}$ e si calcola $f(-x)$, cioè sostituendo al posto di x il suo opposto, si ha $f(-x) = \frac{-4x-12}{-x-2} \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate (non è pari) e non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani (non è dispari). Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile x, si hanno due immagini distinte e non opposte, infatti $A(1\,;8)\ e\ B\left(-1\,;\frac{16}{3}\right)$ sono punti del grafico non simmetrici.

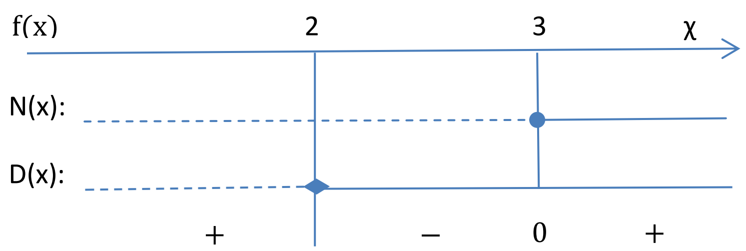
Studio del segno: si pone

$$\frac{4x - 12}{x - 2} \geq 0$$

e si studia il segno sia del numeratore che del denominatore

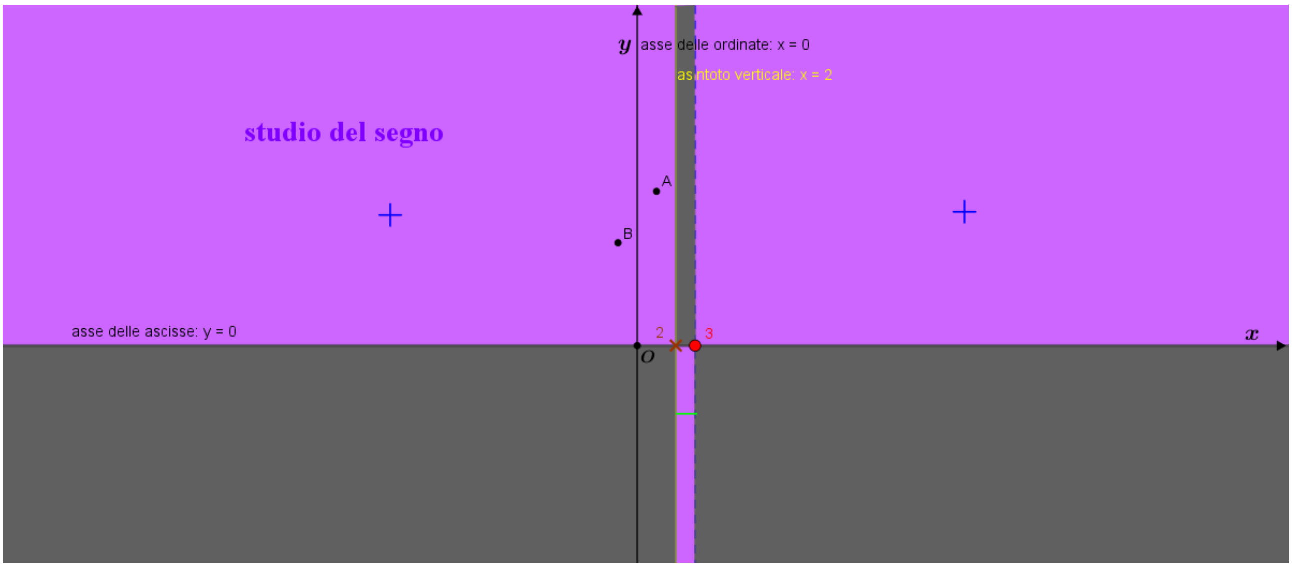
$$\begin{aligned} &N(x):\ 4x - 12 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \\ &D(x):\quad\ x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



la funzione è positiva negli intervalli $]-\infty\,;2[\;\; e \;\;]3\,;+\infty[$, mentre nell'intervallo aperto $]2\,;3[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x=3$, infine è asintotica verticalmente per $x=2$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno:



Intersezioni con gli assi cartesiani: mettendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ascisse, cioè $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$

si ha che la funzione interseca l'asse x nel punto $C(3\,;0)$, mentre ponendo a sistema l'equazione della funzione con l'equazione dell'asse delle ordinate, ossia

$\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$ si ottiene che il grafico interseca l'asse y nel punto $D(0\,;6)$.

Asintoti: la curva presenta un asintoto verticale ed uno orizzontale, per determinare l'asintoto verticale si può utilizzare la formula

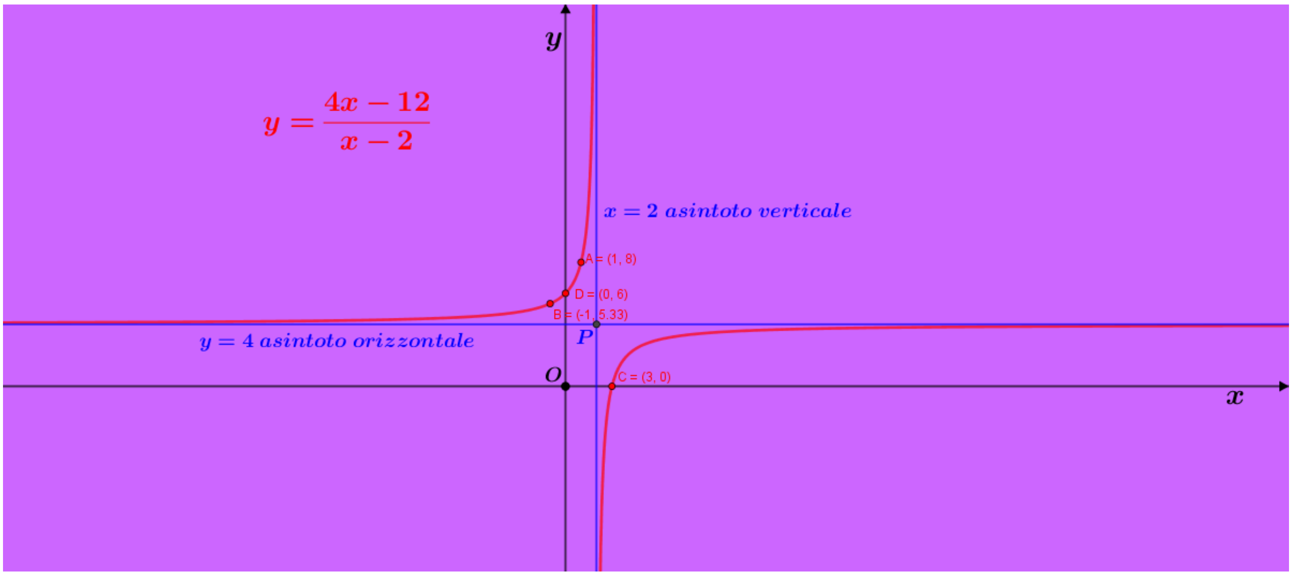
$$x=-\frac{d}{c} \;\rightarrow\; x=2$$

invece per l'asintoto orizzontale si ha

$$y=\frac{a}{c} \rightarrow y=4$$

quindi la curva è asintotica orizzontalmente alla retta di equazione $y=4$.

Grafico:



Torna su