PUNTI STAZIONARI

ESEMPIO N°2

Determinare i punti stazionari della funzione

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x-1}}$$

Si calcola la derivata prima della funzione ossia applicando la regola della derivata del quoziente

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}}$$

si ottiene

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}}$$

Per studiare il segno della derivata prima si pone

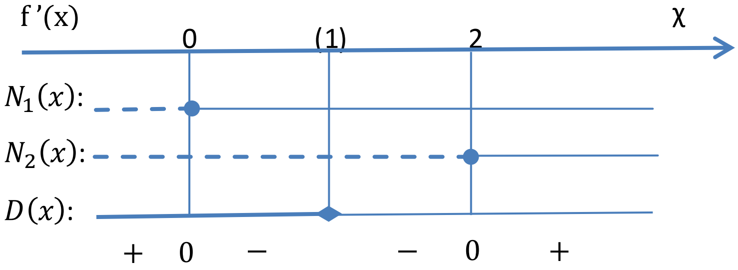
$$\boldsymbol{\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geq 0}$$

Scomponendo il numeratore ha senso scrivere

$$\boldsymbol{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \geq 0}$$

$N_1(x):\ x \geq 0$
$N_2(x): x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$
$D(x):\ \ (x-1)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in Dom(f)$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni della disequazione si ottiene:



Essendo la derivata prima positiva negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[\ e\ ]2\,;+\infty[$, ivi, la funzione data è crescente, mentre essendo la derivata prima negativa negli intervalli aperti $]0\,;1[\ e\ ]1\,;2[$, ivi, la funzione data è decrescente, inoltre la derivata prima si annulla nei punti di ascissa **0 e 2**, dove la funzione data è costante. Pertanto, osservando che nell'intorno di **0** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni

+	0	—

si può dedurre che **0** è un **massimante** della funzione, andando a sostituire nella sua equazione si ottiene

$$\boldsymbol{f(0) = \frac{0}{0-1} = 0}$$

Quindi **l'origine** degli assi cartesiani è un punto di **massimo relativo**.

Infine, osservando che nell'intorno di **2** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni

—	0	+

si può dedurre che **2** è un **minimante** della funzione, andando a sostituire nella sua equazione si ottiene

$$\boldsymbol{f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4}$$

Quindi nel punto $\boldsymbol{A(2\,;4)}$ la funzione presenta un **minimo relativo**.

Graficamente si ha