STUDIO DEL SEGNO DELLA FUNZIONE PARABOLA CUBICA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1. Studiare il segno della funzione

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$

È una funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica spuria (primo caso: $d = 0$)

Si pone

$$x^3 - 6x^2 + 8x \geq 0$$

Mettendo la quantità x a fattor comune totale si ottiene

$$x(x^2 - 6x + 8) \geq 0$$

e scomponendo il trinomio notevole $x^2 - 6x + 8$ la disequazione data si può scrivere

$$x(x-2)(x-4) \geq 0$$

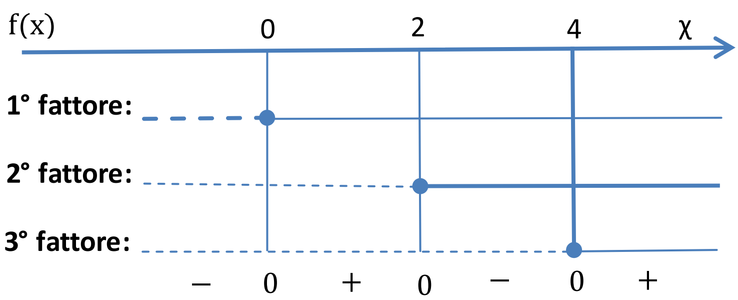
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

terzo fattore: $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]0\,;2[$ e $]4\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[$ e $]2\,;4[$ la funzione è negativa, risulta essere nulla per $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$.

Osservazione

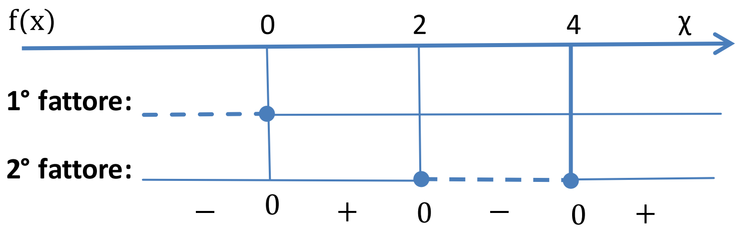
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $x(x^2 - 6x + 8) \geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

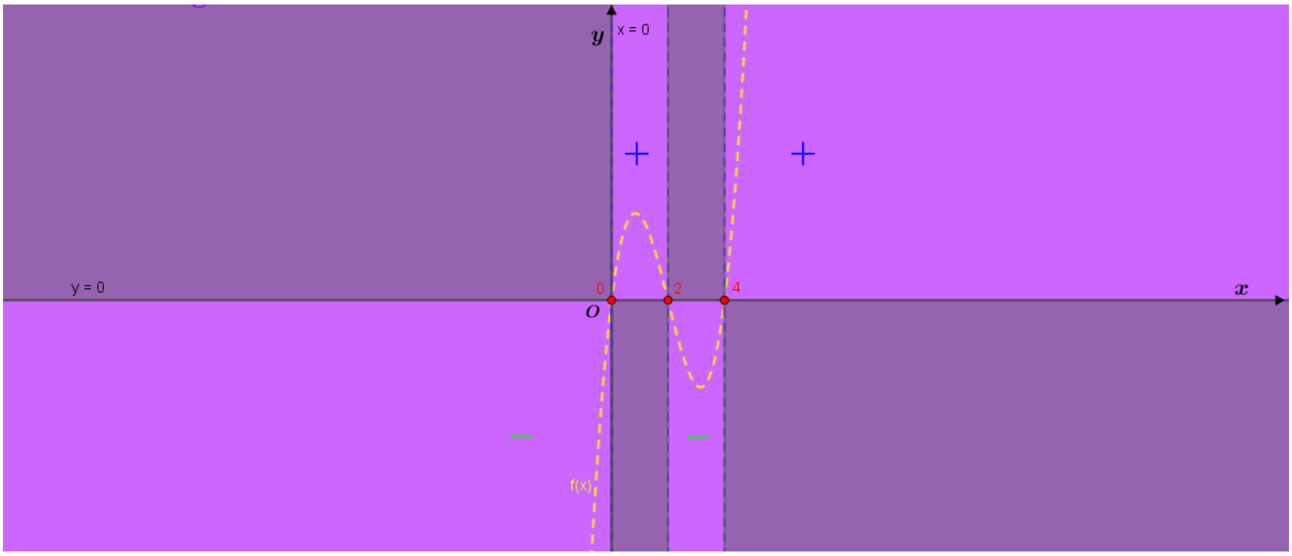
primo fattore: $x \geq 0$

secondo fattore: $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \rightarrow x \leq 2\ , x \geq 4$ **(il trinomio è positivo per i valori esterni dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)**

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



2. Studiare il segno della funzione

$$y = x^3 - 5x^2$$

Funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica spuria (secondo caso: $c = d = 0$)

Si pone

$$x^3 - 5x^2 \geq 0$$

Mettendo la quantità x^2 a fattor comune totale si ottiene

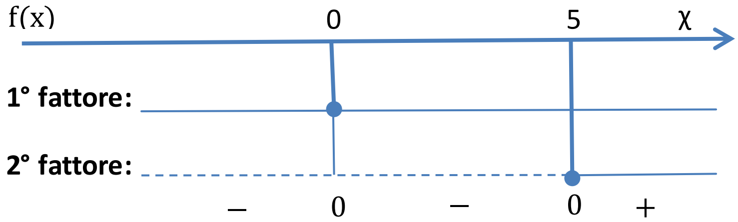
$$x^2(x-5) \geq 0$$

Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $x^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ (la disequazione è sempre verificata per tutti i valori del dominio)

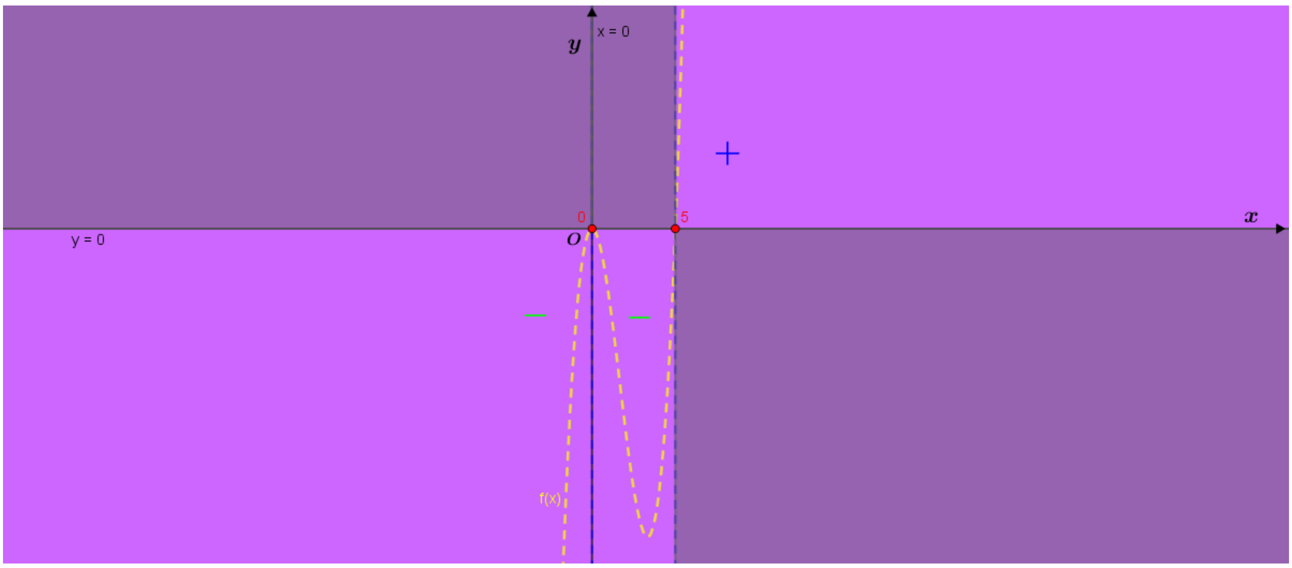
secondo fattore: $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva nell'intervallo aperto $]5\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;0[$ e $]0\,;5[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x = 0$ e per $x = 5$.

Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno



3. **Studiare il segno della funzione**

$$y = 2x^3 - 18x$$

È una funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica spuria (terzo caso: $b = d = 0$)

Si pone

$$2x^3 - 18x \geq 0$$

Mettendo la quantità $2x$ a fattor comune totale si ottiene

$$2x(x^2 - 9) \geq 0$$

e scomponendo la differenza di due quadrati $x^2 - 9$ la disequazione data si può scrivere

$$2x(x-3)(x+3) \geq 0$$

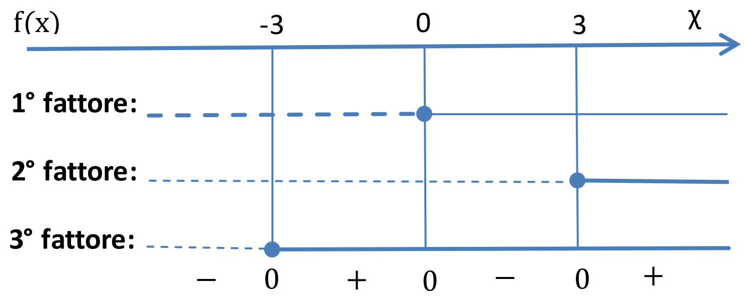
Pertanto, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

secondo fattore: $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

terzo fattore: $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$

Costruendo la rappresentazione unidimensionale delle soluzioni delle disequazioni si ottiene



la funzione è positiva negli intervalli aperti $]-3\,;0[\ e\ ]3\,;+\infty[$, mentre negli intervalli aperti $]-\infty\,;-3[\ e\ ]0\,;3[$ la funzione è negativa, infine risulta essere nulla per $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$.

<u>Osservazione</u>

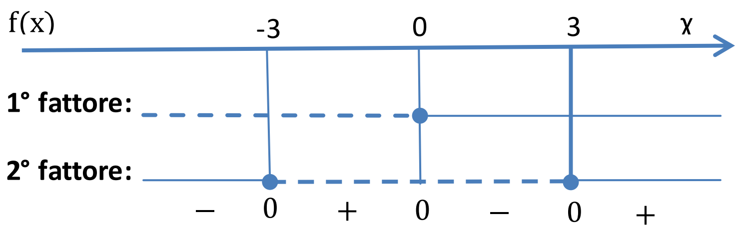
Nello studio del segno si ottengono gli stessi intervalli anche se si considerano soltanto i due fattori della disequazione $2x(x^2 - 9) \geq 0$

Infatti, per la legge di annullamento del prodotto si ha

primo fattore: $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

secondo fattore: $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \leq -3\,, x \geq 3$ (il binomio è positivo per i valori esterni dell'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata)

Quindi, si ha la relativa rappresentazione unidimensionale



Pertanto, si ottiene la seguente rappresentazione bidimensionale dello studio del segno