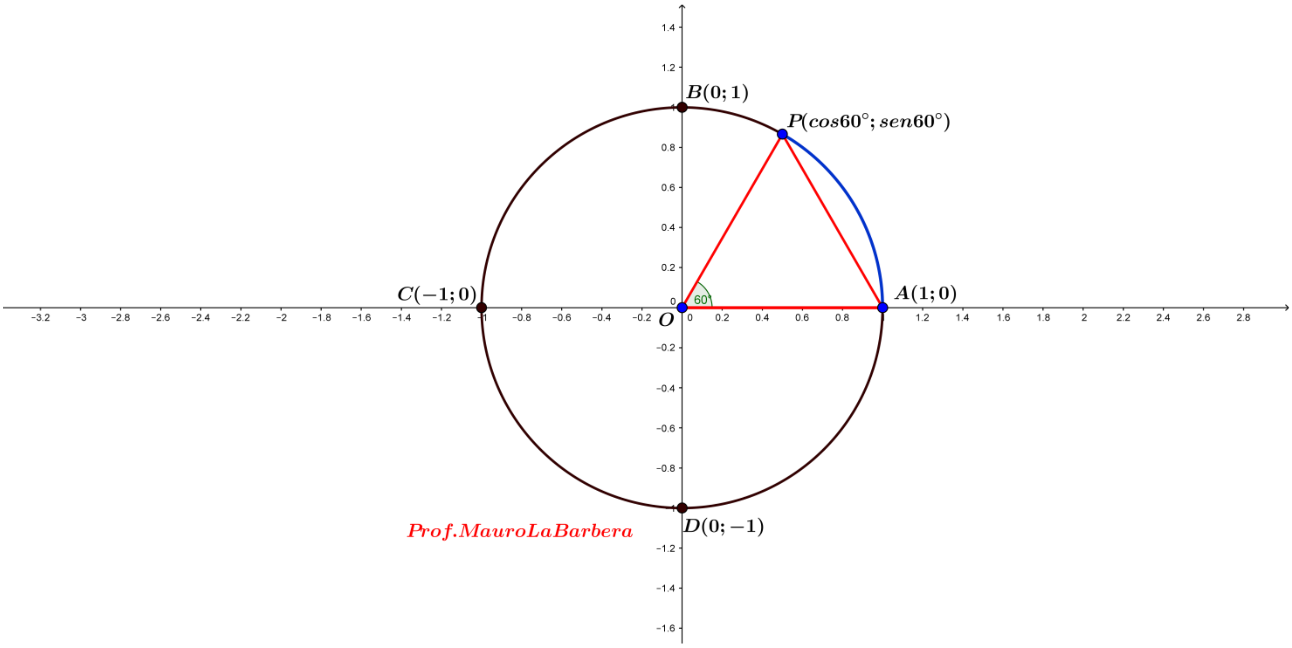
Goniometria

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI

Gli angoli di 30° e 60°

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l'arco $\widehat{AP}$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ $(60°)$ e congiungiamo l'estremo libero dell'arco P con il centro O degli assi cartesiani e con il punto A, origine dell'arco, pertanto $P\hat{O}A = 60°$.



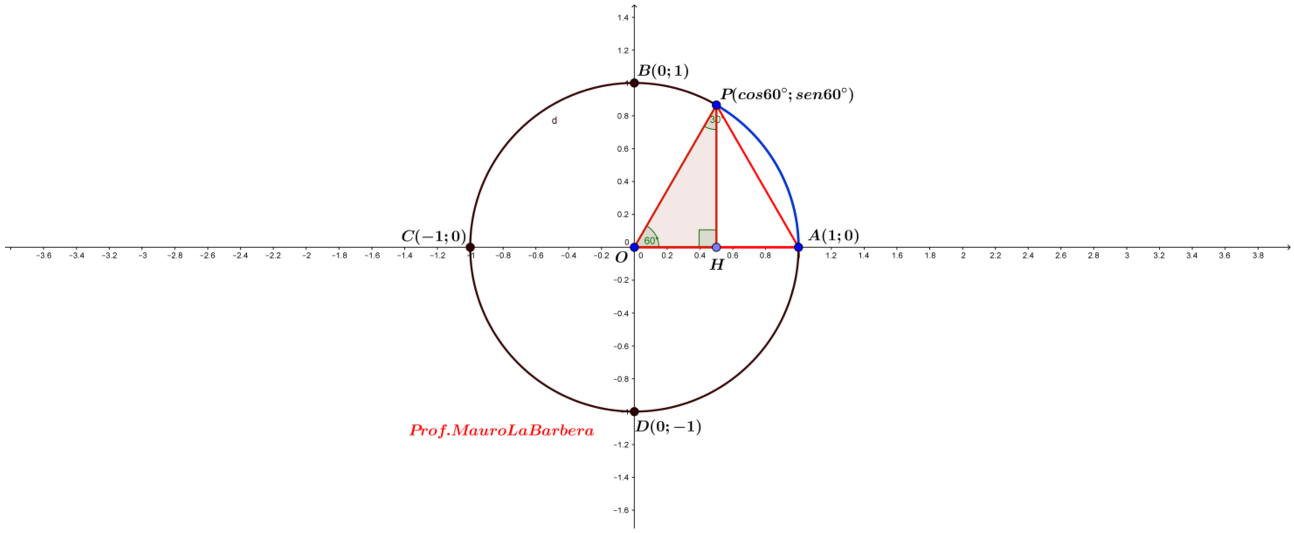
Come si nota in figura il triangolo *OAP* è equilatero, infatti il lato *OP* è uguale al lato *OA* essendo raggi della stessa circonferenza, ciò implica che gli angoli $O\hat{A}P$ e $A\hat{P}O$ sono uguali, ma sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto si ha

$$O\hat{A}P + A\hat{P}O + P\hat{O}A = 180°$$

Cioè $2A\hat{P}O + 60° = 180° \rightarrow 2A\hat{P}O = 120° \rightarrow A\hat{P}O = 60°$ e quindi anche $O\hat{A}P = 60°$

Quindi il triangolo *OAP* è equiangolo e di conseguenza è equilatero.

Tracciando nel triangolo *OAP* l'altezza *HP* relativa al lato *OA* si ha la seguente figura:



e sapendo che in un triangolo equilatero l'altezza relativa ad un lato è anche mediana si ottiene

$$\overline{OH} = \overline{HA} = \frac{1}{2}\overline{OA} \text{ ed essendo } \overline{OA} = 1 \text{ si ottiene } \overline{OH} = \overline{HA} = \frac{1}{2}$$

Inoltre, sapendo che in un triangolo equilatero l'altezza relativa ad un lato è anche bisettrice si ha

$$A\hat{P}H = H\hat{P}O = \frac{1}{2}\, A\hat{P}O = \frac{1}{2}60° = 30°$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *OHP* si può scrivere

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$$

Calcolando il cateto maggiore *HP* si ottiene:

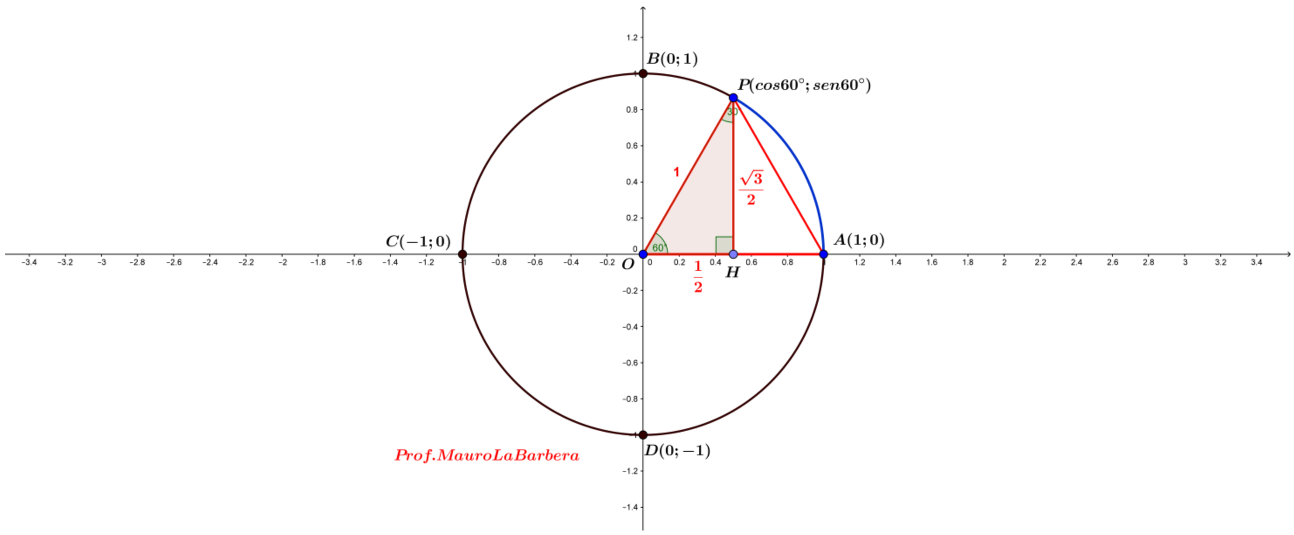
$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$$\boldsymbol{\overline{HP} = sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ cioè } \boldsymbol{sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

e per definizione di coseno si ha

$$\boldsymbol{\overline{OH} = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} \text{ cioè } \boldsymbol{cos60° = \frac{1}{2}}$$



Osservazione:

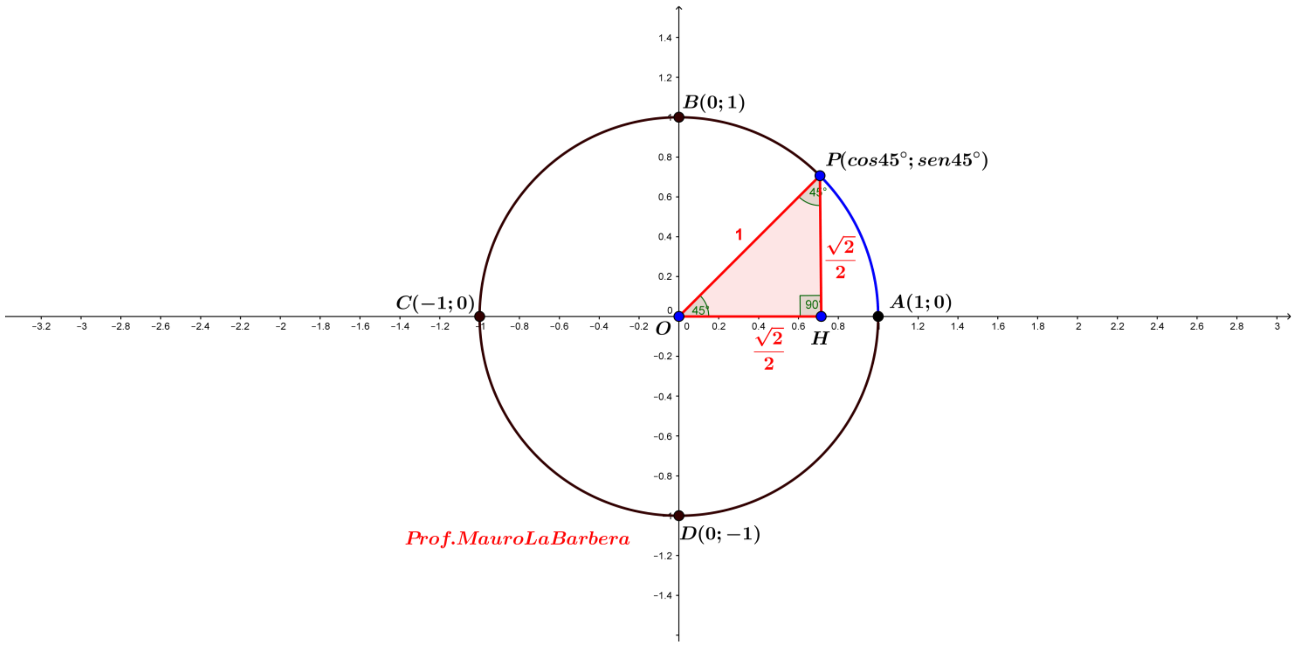
Analogamente si può dimostrare che

$$\boldsymbol{sen\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{cioè} \quad \boldsymbol{sen30°=\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}}\,.$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI

L’angolo di 45°

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l’arco $\widehat{AP}$ di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$ e congiungiamo l’estremo libero dell’arco P con il centro O degli assi cartesiani, inoltre sia H la proiezione del punto P sull’asse delle ascisse, pertanto $P\hat{O}H=45°$.



Come si nota in figura il triangolo OHP è rettangolo ed isoscele, infatti

$$O\hat{H}P=90°\,,\ P\hat{O}H=H\hat{P}O=45°\,,$$

in virtù del Teorema di Pitagora si ha

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$$

Ed essendo i cateti uguali, cioè $\overline{HP} = \overline{OH}$ si può scrivere

$$\overline{OP}^2 = 2\overline{OH}^2$$

Di conseguenza sapendo che $\overline{OP} = 1$ poiché raggio della circonferenza si ottiene

$$2\overline{OH}^2 = 1 \rightarrow \overline{OH}^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{OH} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$$\boldsymbol{\overline{HP} = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ cioè } \boldsymbol{sen45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

e per definizione di coseno si ha

$$\boldsymbol{\overline{OH} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ cioè } \boldsymbol{cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ .}$$