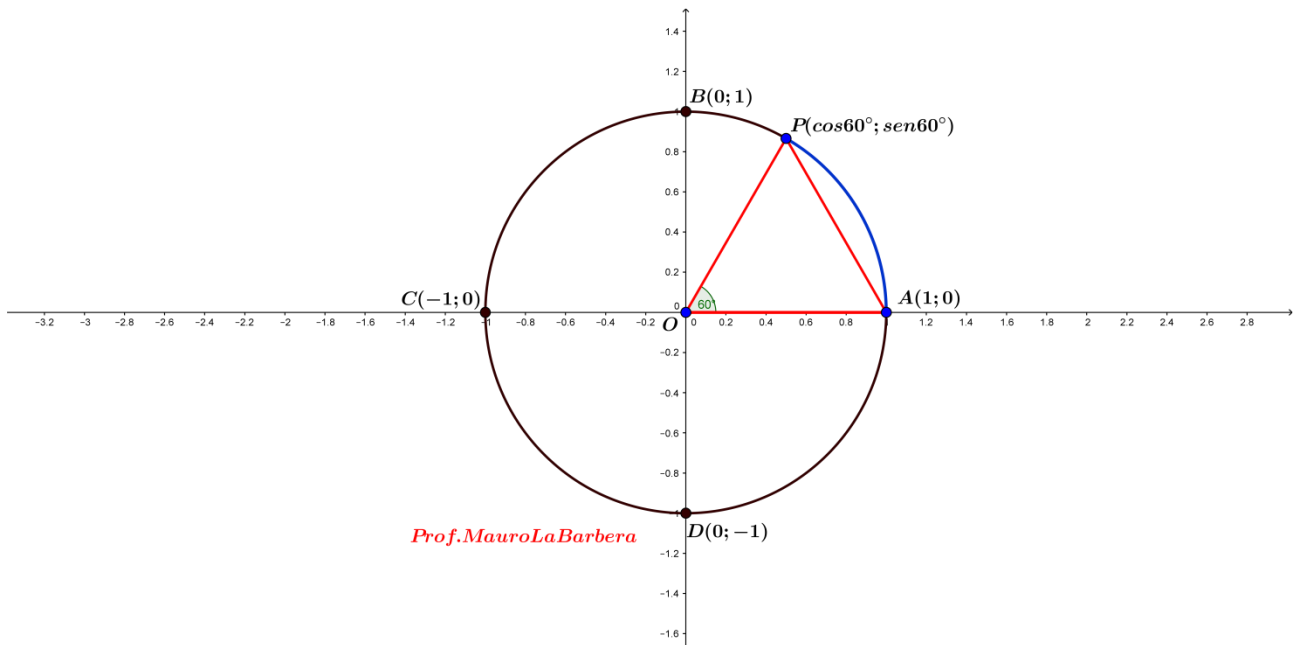


Goniometria

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI

30° e 60°

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l'arco \widehat{AP} di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ (60°) e congiungiamo l'estremo libero dell'arco P con il centro O degli assi cartesiani e con il punto A , origine dell'arco, pertanto $P\hat{O}A = 60^\circ$.



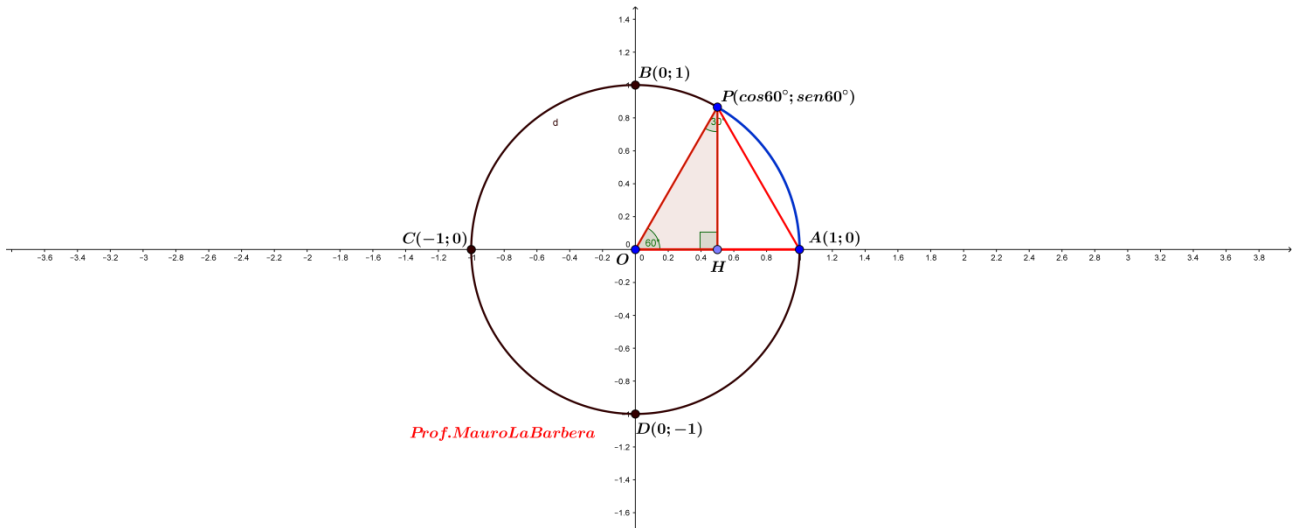
Come si nota in figura il triangolo OAP è equilatero, infatti il lato OP è uguale al lato OA essendo raggi della stessa circonferenza, ciò implica che gli angoli $O\hat{A}P$ e $A\hat{P}O$ sono uguali, ma sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto si ha

$$O\hat{A}P + A\hat{P}O + P\hat{O}A = 180^\circ$$

Cioè $2A\hat{P}O + 60^\circ = 180^\circ \rightarrow 2A\hat{P}O = 120^\circ \rightarrow A\hat{P}O = 60^\circ$ e quindi anche $O\hat{A}P = 60^\circ$

Quindi il triangolo OAP è equiangolo e di conseguenza è equilatero.

Tracciando nel triangolo OAP l'altezza HP relativa al lato OA si ha la seguente figura:



e sapendo che in un triangolo equilatero l'altezza relativa ad un lato è anche mediana si ottiene

$$\overline{OH} = \overline{HA} = \frac{1}{2} \overline{OA} \text{ ed essendo } \overline{OA} = 1 \text{ si ottiene } \overline{OH} = \overline{HA} = \frac{1}{2}$$

Inoltre, sapendo che in un triangolo equilatero l'altezza relativa ad un lato è anche bisettrice si ha

$$\widehat{APH} = \widehat{HPO} = \frac{1}{2} \widehat{APO} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHP si può scrivere

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$$

Calcolando il cateto maggiore HP si ottiene:

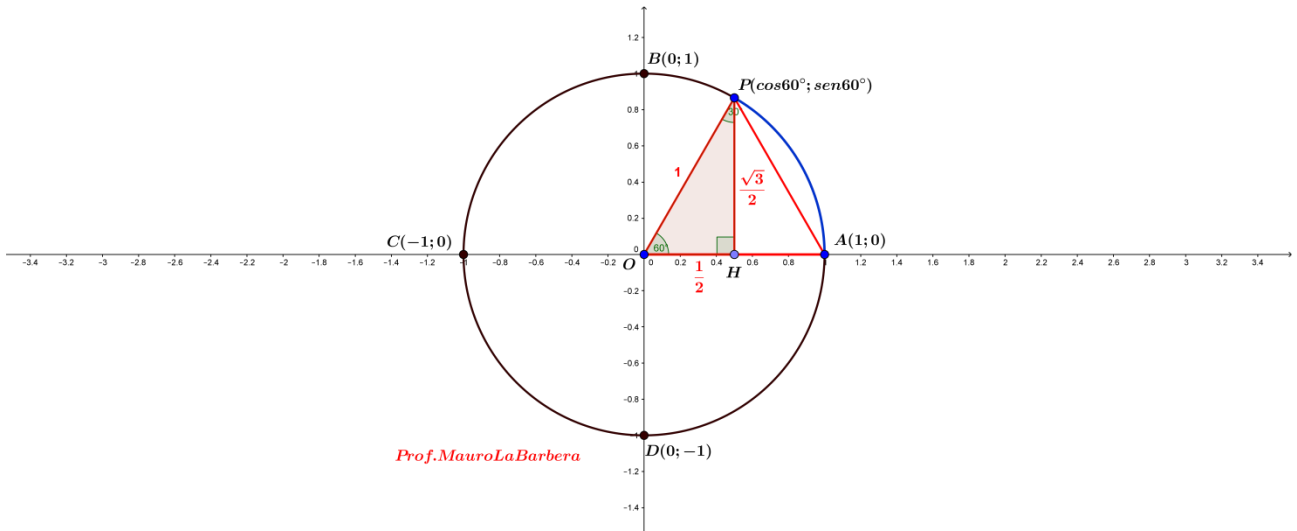
$$\overline{HP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$$\overline{HP} = \text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cioè } \text{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e per definizione di coseno si ha

$$\overline{OH} = \text{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ cioè } \text{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}$$



Osservazione:

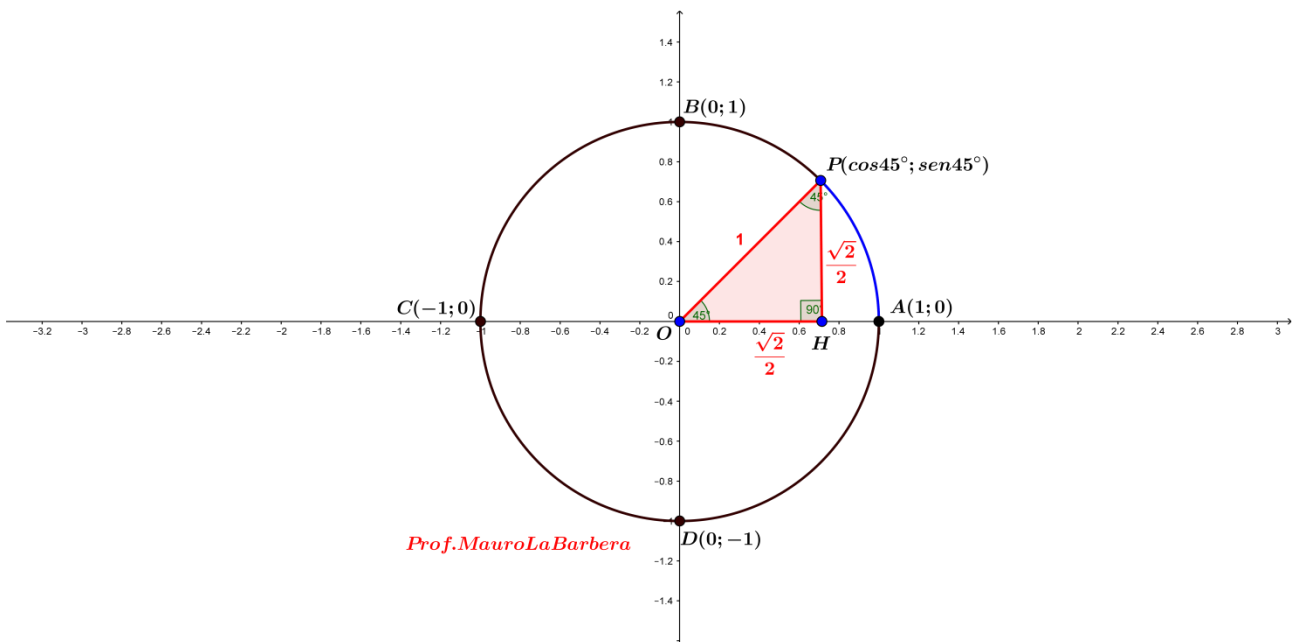
Analogamente si può dimostrare che

$$\text{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } \text{cos} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cioè } \text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ e } \text{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI

45°

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l'arco \widehat{AP} di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ (45°) e congiungiamo l'estremo libero dell'arco P con il centro O degli assi cartesiani, inoltre sia H la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse, pertanto $\widehat{POH} = 45^\circ$.



Come si nota in figura il triangolo OHP è rettangolo ed isoscele, infatti

$$\widehat{OHP} = 90^\circ, \widehat{POH} = \widehat{HPO} = 45^\circ,$$

in virtù del Teorema di Pitagora si ha

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2$$

Ed essendo i cateti uguali, cioè $\overline{HP} = \overline{OH}$ si può scrivere

$$\overline{OP}^2 = 2\overline{OH}^2$$

Di conseguenza sapendo che $\overline{OP} = 1$ poiché raggio della circonferenza si ottiene

$$2\overline{OH}^2 = 1 \rightarrow \overline{OH}^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{OH} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$$\overline{HP} = \mathbf{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cioè } \mathbf{sen45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e per definizione di coseno si ha

$$\overline{OH} = \mathbf{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cioè } \mathbf{cos45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$