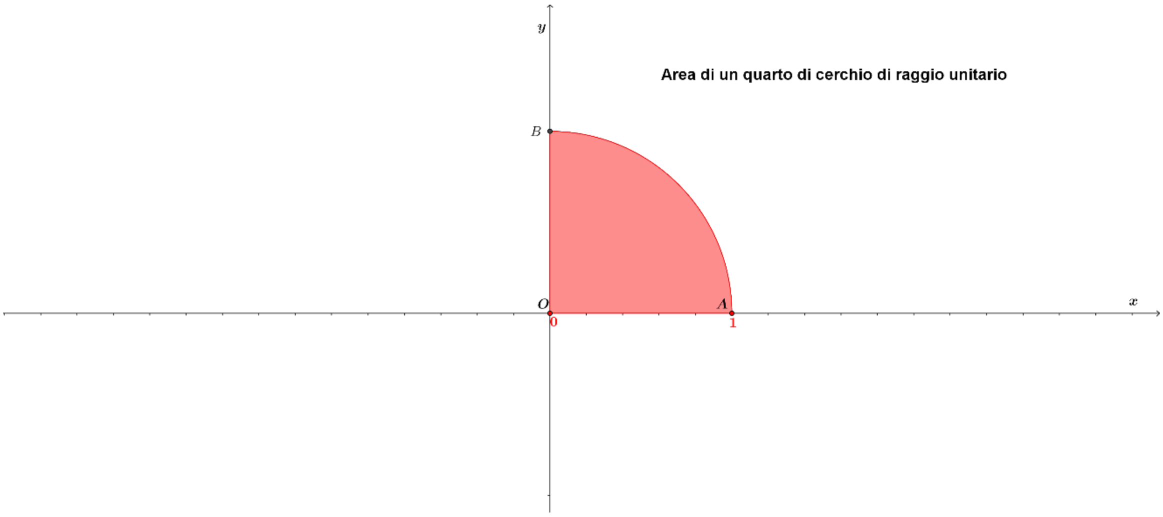
AREA DI UNA REGIONE DI PIANO

Esercizio svolto n°5

Calcolare l'area della regione di piano limitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{1-x^2}$ e dall'asse delle ascisse.

La curva interseca l'asse delle ascisse nei punti $O(0;0)$ e $A(1;0)$, pertanto, per determinare l'area bisogna calcolare il seguente integrale definito

$$Area = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$



Si vuole calcolare l'area di $\frac{1}{4}$ di cerchio di raggio 1

Sapendo che l'integrale indefinito di una funzione f(x) è l'insieme di tutte le funzioni primitive ossia

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K$$

si deve trovare la generica primitiva $F(x)$ / $F'(x) = f(x)$

Pertanto, bisogna determinare la generica primitiva dell'integrale indefinito

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Si può fare un cambio di variabile ponendo

$$x = sen\ t$$

quindi si ottiene

$$x^2 = sen^2 t \text{ e } dx = d(sen\ t) = cos\ t\ dt$$

Andando a sostituire si può scrivere

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-sen^2 t}\; cos\,t\,dt$$

Ricordando la prima relazione fondamentale della goniometria, cioè $cos^2 t + sen^2 t = 1$ *si ha*

$$cos^2 t = 1 - sen^2 t$$

cioè

$$\int \sqrt{1-sen^2 t}\cdot cos\,t\,dt = \int \sqrt{cos^2 t}\cdot cos\,t\,dt = \int cos\,t\cdot cos\,t\,dt = \int cos^2 t\,dt$$

Applicando la regola della duplicazione dell'angolo del coseno, cioè $cos\,2t = cos^2 t - sen^2 t$

si ottiene $cos\,2t = cos^2 t - (1 - cos^2 t) = \; 2cos^2 t - 1$

Quindi ricavando la quantità $cos^2 t$ *si deduce che*

$$cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + cos\,2t)$$

e sostituendo si ottiene

$$\int cos^2 t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+cos\,2t)\,dt$$

Applicando la proprietà di omogeneità degli integrali si ha

$$\int \frac{1}{2}(1+cos\,2t)\,dt = \frac{1}{2}\int (1+cos\,2t)\,dt$$

Applicando la proprietà di additività degli integrali si ha

$$\frac{1}{2}\int (1+cos\,2t)\,dt = \frac{1}{2}\int\; dt + \frac{1}{2}\int cos\,2t\,dt$$

Dal primo integrale indefinito si ricava

$$\int dt = t + K$$

Dal secondo integrale indefinito si ricava

$$\int cos\,2t\,dt = \int \frac{1}{2}\cdot 2\,cos\,2t\,dt = \frac{1}{2}\int cos\,2t\,d\,2t = \frac{1}{2}\,sen\,2t + K$$

Pertanto, la primitiva generica dell'integrale indefinito

$$\int (1 + \cos 2t)\, dt$$

è

$$t + \frac{1}{2} sen\ 2t$$

Quindi si deduce che

$$\frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt \ \ ha\ per\ primitiva\ generica\ \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} sen\ 2t\right)$$

Poiché è stato fatto un cambio di variabile bisogna fare anche il cambio degli estremi di integrazione, cioè

$$x = 0 \rightarrow sen\, t = 0 \rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \rightarrow sen\, t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Ricapitolando l'integrale definito

$$Area = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$$

è uguale all'integrale definito

$$Area = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} sen\ 2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

Essendo l'estremo inferiore uguale a 0 basta sostituire il valore $\frac{\pi}{2}$ *dell'estremo superiore nella primitiva*

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} sen\ (2 \times \frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} sen\ \pi\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Pertanto, l'area di } \frac{1}{4} \text{ di cerchio di raggio 1 risulta uguale a } \frac{\pi}{4}$$

Ovviamente l'area del cerchio di raggio 1 è uguale a π.

Ricordando la formula della geometria euclidea l'area del cerchio è $\pi\, r^2$ ed essendo $r = 1$ si ottiene lo stesso risultato.