CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Esercizio n°1

Calcolare la probabilità di vincita nel gioco del lotto di indovinare un estratto semplice.

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 5 numeri di classe 1, cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si ottiene

$$C_{5,1} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 5$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 90 numeri di classe 1,

ossia

$$C_{90,1} = \binom{90}{1} = \frac{90!}{1!\,(90-1)!} = \frac{90!}{1! \times 89!} = \frac{90 \times 89!}{1 \times 89!} = 90$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(estratto) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{90}{1}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

Esercizio n°2

Calcolare la probabilità di vincita nel gioco del lotto di fare un ambo.

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 5 numeri di classe 2, cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si ottiene

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 5 \times 2 = 10$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 90 numeri di classe 2,

ossia

$$C_{90,2} = \binom{90}{2} = \frac{90!}{2!\,(90-2)!} = \frac{90!}{2! \times 88!} = \frac{90 \times 89 \times 88!}{2 \times 88!} = 45 \times 89 = 4005$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(ambo) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}} = \frac{10}{4005} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400{,}5}$$

Esercizio n°3

Calcolare la probabilità di vincita nel gioco del lotto di fare un terno.

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 5 numeri di classe 3, cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si ottiene

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 90 numeri di classe 3,

ossia

$$C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{90!}{3!\,(90-3)!} = \frac{90!}{3! \times 87!} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87!}{3 \times 2 \times 87!} = 15 \times 89 \times 88 = 117.480$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(terno) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{10}{117.480} = \frac{1}{11.748}$$

Esercizio n°4

Calcolare la probabilità di fare un poker d'Assi (servito) giocando con un mazzo di 32 carte $(A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7)$.

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 28 elementi (32-4 assi) di classe 1 (quinta carta), cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si ottiene

$$C_{28,1} = \binom{28}{1} = \frac{28!}{1!\,(28-1)!} = \frac{28!}{1! \times 27!} = \frac{28 \times 27!}{1 \times 27!} = 28$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 32 elementi di classe 5,

ossia

$$C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,(32-5)!} = \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 27!} = 201.376$$

(numero delle "mani").

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(poker\ d'Assi) = \frac{\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{28}{\mathbf{201.376}} = \frac{1}{7.192} \quad (0{,}01390434\%)$$

Esercizio n°5

Calcolare la probabilità di fare un poker (servito) giocando con un mazzo di 32 carte.

Poiché esistono 8 possibili tipologie di poker, per determinare i casi favorevoli si moltiplica per 8 il numero dato dalle combinazioni semplici di 28 elementi di classe 1, cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

si ottiene

$$\boldsymbol{8 \times C_{28,1} = 8 \times \binom{28}{1} = 8 \times \frac{28!}{1!\,(28-1)!} = 8 \times \frac{28!}{1! \times 27!} = 8 \times \frac{28 \times 27!}{1 \times 27!} = 8 \times 28 = 224}$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 32 elementi di classe 5,

ossia

$$\boldsymbol{C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,(32-5)!} = \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 27!} = 201.376}$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(poker) = \frac{224}{\mathbf{201.376}} = \frac{1}{899} \quad (0{,}11123471\%)$$

Esercizio n°6

Calcolare la probabilità che esca 2 volte testa e 2 volte croce lanciando 4 volte una moneta?

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 4 elementi (numero dei lanci) di classe 2 (2 volte testa o 2 volte croce), cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

si ottiene

$$\boldsymbol{C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{4} = 6}$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le disposizioni con ripetizione di 2 elementi (testa e croce) di classe 4 (4 lanci),

ossia sapendo che

$$D'_{n,k} = n^k$$

si ottiene

$$D'_{4,2} = 2^4 = 16$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(testa - testa - croce - croce) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad (37{,}5\%)$$

Esercizio n°7

In un'urna ci sono 30 palline rosse e 20 palline nere, calcolare la probabilità di estrarre due palline rosse.

Per determinare i casi favorevoli si calcolano le combinazioni semplici di 30 elementi di classe 2, cioè applicando la legge dei tre fattoriali

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

si ottiene

$$C_{30,2} = \binom{30}{2} = \frac{30!}{2!\,(30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!} = \frac{30 \times 29 \times 28!}{2 \times 28!} = 15 \times 29 = 435$$

Per determinare i casi possibili si calcolano le combinazioni semplici di 50 elementi di classe 2,

ossia

$$C_{50,2} = \binom{50}{2} = \frac{50!}{2!\,(50-2)!} = \frac{50!}{2! \times 48!} = \frac{50 \times 49 \times 48!}{2 \times 48!} = 25 \times 49 = 1.225$$

Sapendo che la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili si ha

$$P(due\ palline\ rosse) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{435}{1.225} = \frac{87}{245} = 0{,}3551 \ (\sim 35{,}51\%)$$

Esercizio n°8

In un'urna ci sono 5 palline rosse e 5 palline nere, mentre in una seconda urna ci sono 8 palline rosse e 4 palline nere, calcolare la probabilità di estrarre dalle due urne 2 palline nere.

Se si pone con E_1 l'evento "estrazione di una pallina nera dalla prima urna", per determinare la probabilità dell'evento E_1 si ha

$$P(E_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Se si pone con E_2 l'evento "estrazione di una pallina nera dalla seconda urna", per determinare la probabilità dell'evento E_2 si ha

$$P(E_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Gli eventi sono indipendenti quindi la probabilità dell'evento *intersezione* è

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \; (\sim 16,67\%)$$