Equazioni algebriche di secondo grado

Esercizio n°1

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

E' un'equazione algebrica completa, infatti sapendo che $ax^2 + bx + c = 0$ è la forma canonica, si ha

$$a = +1\,,\ b = -4\ e\ c = +3\,.$$

Primo metodo

Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(+1)(+3) = 16 - 12 = 4 > 0$$

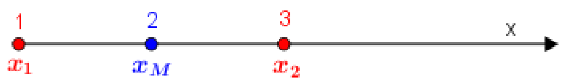
Poiché il discriminate è maggiore di zero allora l'equazione data ammette due soluzioni reali e distinte, ossia

$$\exists\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \,/\, x_1 < x_2$$

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2\ (valore\ medio\ delle\ soluzioni)$$

Secondo metodo

Essendo il primo membro un trinomio notevole si può scomporre nel seguente modo:

si cercano due numeri $x_1\ e\ x_2$ che moltiplicati danno $+3\ (prodotto)$ e sommati danno $-4\ (somma)$, in modo tale che il trinomio dato si possa scrivere come il prodotto di due binomi

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 3) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ottiene

$$primo\ fattore\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1\ \ e\ \ secondo\ fattore\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Esercizio n°2

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

E' un'equazione algebrica completa, infatti $a = +1$, $b = -4$ e $c = +4$.

Primo metodo

Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(+1)(+4) = 16 - 16 = 0$$

Poiché il discriminate è uguale a zero allora l'equazione data ammette due soluzioni reali e coincidenti, ossia

$$\exists \; x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \, / \, x_1 \equiv x_2$$

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \; (molteplicità \; due)$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \; (valore \; medio \; delle \; soluzioni)$$

Secondo metodo

Essendo il primo membro lo sviluppo di un quadrato di binomio si può scomporre nel seguente modo:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \; (molteplicita' \; due)$$

Esercizio n°3

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

E' un'equazione algebrica completa, infatti $a = +1$, $b = -2$ e $c = +4$.

Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(+1)(+4) = 4 - 16 = -12$$

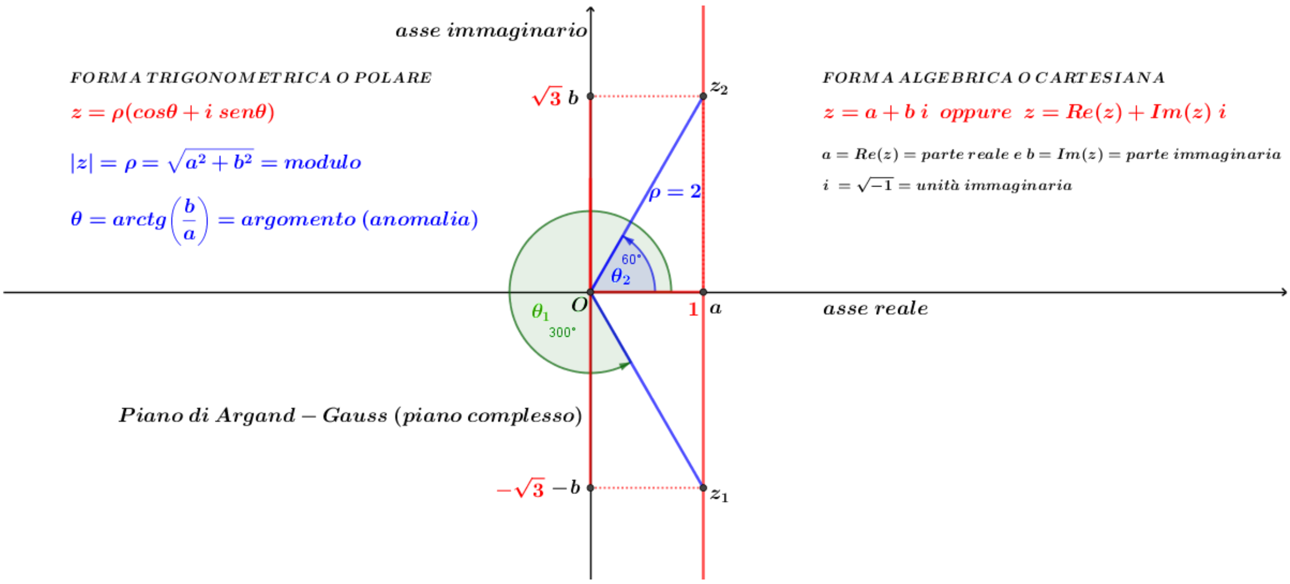
Poiché il discriminate è minore di zero allora l'equazione data non ammette soluzioni reali, ma due soluzioni complesse coniugate, cioè appartenenti al campo di Gauss, ossia

$$\nexists\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\ ossia\ \exists\ z_1 \wedge z_2 \in \mathbb{C}$$

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{12}\, i}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3}\, i)}{2} \begin{array}{l} \nearrow z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i \\ \searrow z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i \end{array}$$

Rappresentazione delle soluzioni nel campo di Argand-Gauss:



Osservazioni

- I numeri complessi possono essere scritti in forma trigonometrica:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i = 2(cos\, 300° + i\ sen\, 300°) = 2(cos\, 60° - i\ sen\, 60°)$$
$$z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i = 2(cos\, 60° + i\ sen\, 60°)$$

- Per indicare che le soluzioni sono numeri complessi e coniugati si può utilizzare la seguente simbologia $z_1 = \overline{z_2}$ e viceversa $z_2 = \overline{z_1}$.

Esercizio n°4

$$2x^2 - 4x = 0$$

E' un'equazione algebrica incompleta, *spuria discorde*, infatti

$$a = +2\,,\ \ b = -4\ \ e\ \ c = 0\,.$$

Primo metodo

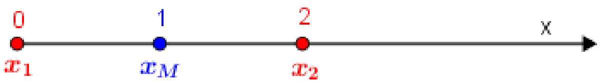
Si può scomporre il primo membro, mettendo la quantità $2x$ a fattor comune, pertanto, ha senso scrivere

$$2x(x-2) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ottiene

$$primo\ fattore\ 2x = 0 \rightarrow x = 0\ \ e\ \ secondo\ fattore\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1\ (valore\ medio\ delle\ soluzioni)$$

Poiché il discriminate è maggiore di zero allora l'equazione data ammette due soluzioni reali e distinte, ed essendo *spuria discorde* la soluzione minore è nulla, mentre la seconda è positiva, ossia

$$\exists\ \ x_1 \wedge x_2\ \epsilon\, \mathbb{R}\,/\,0 = x_1 < x_2$$

Secondo metodo

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \dfrac{4-4}{4} = \dfrac{0}{4} = 0 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4+4}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{matrix}$$

Esercizio n°5

$$5x^2+15x=0$$

E' un'equazione algebrica incompleta, *spuria concorde*, infatti

$$a=+5\,,\; b=+15 \;\; e \;\; c=0\,.$$

Primo metodo

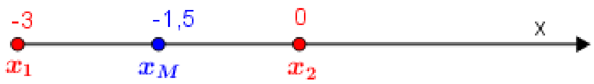
Si può scomporre il primo membro, mettendo la quantità $5x$ a fattor comune, pertanto, ha senso scrivere

$$5x(x+3)=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si ottiene

$$primo\ fattore\ 5x=0 \rightarrow x=0 \;\; e \;\; secondo\ fattore\ x+3=0 \rightarrow x=-3$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-3+0}{2}=-\frac{3}{2}\ (valore\ medio\ delle\ soluzioni)$$

Poiché il discriminate è maggiore di zero allora l'equazione data ammette due soluzioni reali e distinte, ed essendo *spuria concorde* la soluzione minore è negativa, mentre la seconda è nulla, ossia

$$\exists\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R} \,/\, x_1 < x_2 = 0$$

Secondo metodo

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{225}}{2\cdot 5}= \begin{array}{l} \nearrow x_1=\dfrac{-15-15}{10}=-\dfrac{30}{10}=-3 \\ \searrow x_2=\dfrac{-15+15}{10}=\dfrac{0}{10}=0 \end{array}$$

Esercizio n°6

$$5x^2-20=0$$

E' un'equazione algebrica incompleta, *pura discorde*, infatti

$$a=+5\,,\ b=0\ e\ c=-20\,.$$

Primo metodo

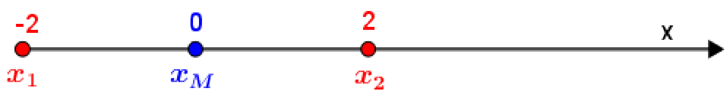
Applicando la legge del trasporto al termine noto, ha senso scrivere

$$5x^2=20$$

Dividendo per 5 ed estraendo la radice quadrata ambo i membri (proprietà invariantiva) si ottiene

$$\frac{5x^2}{5}=\frac{20}{5}\rightarrow x^2=4\rightarrow\sqrt{x^2}=\sqrt{4}\rightarrow x=\pm2$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:



$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+2}{2}=\frac{0}{2}=0\ (valore\ medio\ delle\ soluzioni)$$

Poiché il discriminate è maggiore di zero allora l'equazione data ammette due soluzioni reali e distinte, ed essendo *pura discorde* le soluzioni sono opposte, ossia

$$\exists\ x_1\wedge x_2\in\mathbb{R}-x_1=-x_2$$

Secondo metodo

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$x=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\frac{\sqrt{400}}{2\cdot5}=\begin{cases}\nearrow x_1=-\dfrac{20}{10}=-2\\ \searrow x_2=+\dfrac{20}{10}=+2\end{cases}$$

Esercizio n°7

$$5x^2 + 20 = 0$$

E' un'equazione algebrica incompleta, *pura concorde*, infatti

$$a = +5\,,\ \ b = 0\ \ e\ \ c = +20\,.$$

Primo metodo

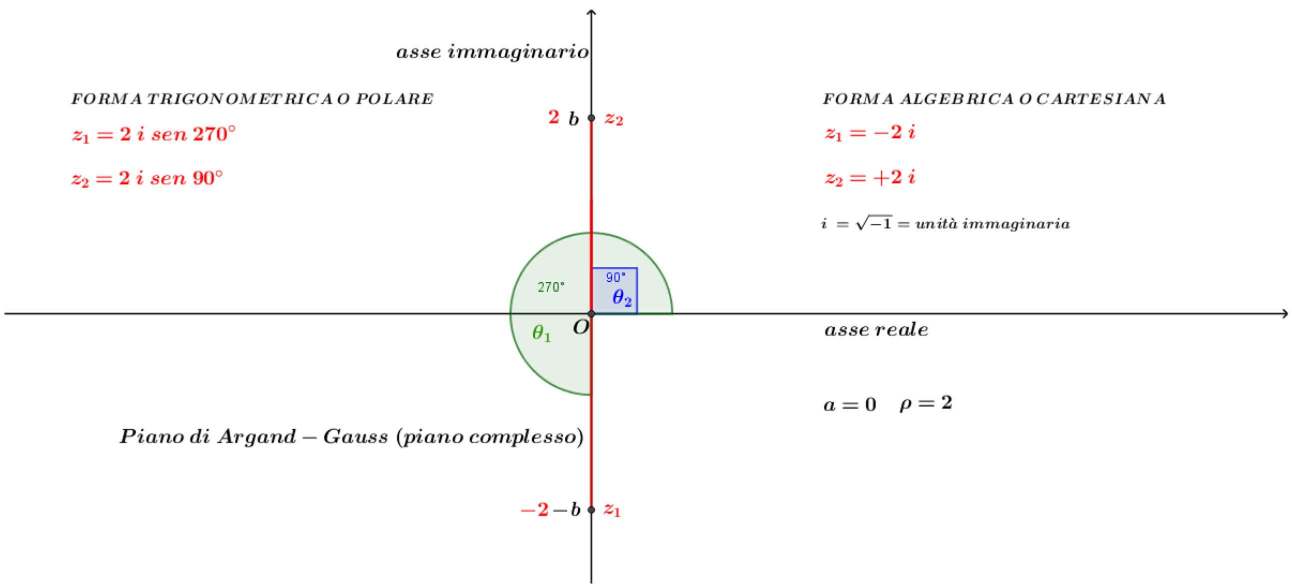
Applicando la legge del trasporto al termine noto, ha senso scrivere

$$5x^2 = -20$$

Dividendo per 5 ed estraendo la radice quadrata ambo i membri (proprietà invariantiva) si ottiene

$$\frac{5x^2}{5} = -\frac{20}{5} \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-4} \rightarrow x = \pm\sqrt{4}\,i \rightarrow x = \pm 2\,i$$

Rappresentazione delle soluzioni nel campo di Argand-Gauss:



Poiché il discriminate è minore di zero allora l'equazione data non ammette soluzioni reali, ma due soluzioni complesse coniugate (opposte immaginarie), cioè appartenenti al campo di Gauss, ossia

$$\nexists\ x_1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\ \ ossia\ \ \exists\ z_1 \wedge z_2 \in \mathbb{C}$$

Secondo metodo

Applicando la regola di risoluzione si ha

$$z = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-400}}{2\cdot 5} = \begin{cases} \nearrow z_1 = -\dfrac{20\,i}{10} = -2\,i \\ \searrow z_2 = +\dfrac{20\,i}{10} = +2\,i \end{cases}$$

Esercizio n°8

$$6x^2 = 0$$

E' un'equazione algebrica incompleta, *monomia*, infatti

$$a = +6\,,\ \ b = 0\ \ e\ \ c = 0\,.$$

Dividendo per 6 ambo i membri (proprietà invariantiva) si ottiene

$$\frac{6x^2}{6} = \frac{0}{6} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0\ (molteplicita'\ due)$$

L'equazione ammette due soluzioni nulle nel campo reale, ossia

$$\exists\ \ x_1 \wedge x_2\ \epsilon\ \mathbb{R}\ /\ x_1 = x_2 = 0$$

Rappresentazione unidimensionale delle soluzioni reali:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0\ (valore\ medio\ delle\ soluzioni)$$

[Torna su]