

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esercizio n°1

$$\int x e^x dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x$ quindi

$$\int x e^x dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = x &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = 1 \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = e^x \\ &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k = e^x(x - 1) + k \end{aligned}$$

Esercizio n°2

$$\int x^2 e^x dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = x^2$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x$ quindi

$$\int x^2 e^x dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = x^2 &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = 2x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = e^x \\ &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x dx}_{\text{esercizio n°1}} = x^2 e^x - 2e^x(x - 1) + k = e^x(x^2 - 2x + 2) + k \end{aligned}$$

Esercizio n°3

$$\int \ln x \, dx$$

N.B.: poiché $\ln x$ si può scrivere uguale a $\ln x \cdot 1$ allora l'integrale indefinito dato diventa

$$= \int \ln x \cdot 1 \, dx =$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \ln x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = 1$ quindi

$$\int \ln x \cdot 1 \, dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \ln x \rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = \frac{1}{x} \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = 1 \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = x \\ = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + k = x(\ln x - 1) + k \end{aligned}$$

Esercizio n°4

$$\int x \ln x \, dx$$

N.B.: per la proprietà commutativa $x \cdot \ln x = \ln x \cdot x$ allora l'integrale indefinito dato diventa

$$= \int \ln x \cdot x \, dx =$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \ln x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = x$ quindi

$$\int \ln x \cdot x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \ln x \rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = \frac{1}{x} \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = \frac{x^2}{2} \\ = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + k \end{aligned}$$

Esercizio n°6

$$\int \sin x e^x dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \sin x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x$ quindi

$$\int \sin x e^x dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \sin x &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = \cos x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = e^x \\ &= \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx \end{aligned}$$

Per risolvere $\int \cos x e^x dx$ si applica di nuovo la regola dell'integrazione per parti

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \cos x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x$ quindi

$$\int \cos x e^x dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \cos x &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = -\sin x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = e^x \\ &= \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx = \cos x e^x + \int \sin x e^x dx \end{aligned}$$

Pertanto, l'integrale indefinito iniziale, cioè

$$\int \sin x e^x dx$$

è uguale a

$$\sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

Ma

$$\int \cos x e^x dx$$

è uguale a

$$\cos x e^x + \int \sin x e^x dx$$

Quindi sussiste la seguente relazione

$$\int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx$$

Cioè

$$\int \text{sen } x e^x dx = \text{sen } x e^x - \cos x e^x - \int \text{sen } x e^x dx$$

Trasportando la quantità $-\int \text{sen } x e^x dx$ dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha

$$\int \text{sen } x e^x dx + \int \text{sen } x e^x dx = \text{sen } x e^x - \cos x e^x + c$$

Ossia

$$2 \int \text{sen } x e^x dx = \text{sen } x e^x - \cos x e^x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 si può scrivere

$$\frac{2}{2} \int \text{sen } x e^x dx = \frac{\text{sen } x e^x - \cos x e^x}{2} + \frac{c}{2}$$

Mettendo in evidenza il fattore comune totale e^x

e posto

$$\frac{c}{2} = k$$

si ottiene

$$\int \text{sen } x e^x dx = \frac{e^x}{2} (\text{sen } x - \cos x) + k$$

Osservazione

Procedendo con lo stesso metodo si ottiene che

$$\int \cos x e^x dx = \frac{e^x}{2} (\text{sen } x + \cos x) + k$$

Esercizio n°7

$$\int \text{sen}^2 x \, dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} \, dx$$

Essendo $\text{sen}^2 x = \text{sen } x \cdot \text{sen } x$ allora l'integrale indefinito dato si può scrivere

$$= \int \text{sen } x \cdot \text{sen } x \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \text{sen } x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = \text{sen } x$ quindi

$$\int \text{sen } x \text{ sen } x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \text{sen } x &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = \text{cos } x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = \text{sen } x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = -\text{cos } x \\ &= \text{sen } x \cdot (-\text{cos } x) - \int \text{cos } x \cdot (-\text{cos } x) \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + \int \text{cos}^2 x \, dx \end{aligned}$$

Ricordando che per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha $\text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ allora

$$\text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

quindi

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + \int \text{cos}^2 x \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + \int (1 - \text{sen}^2 x) \, dx =$$

Per la proprietà additiva degli integrali si ottiene

$$= -\text{sen } x \text{ cos } x + \int dx - \int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + x - \int \text{sen}^2 x \, dx$$

Quindi sussiste la seguente equazione

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + x - \int \text{sen}^2 x \, dx$$

Trasportando la quantità $-\int \text{sen}^2 x \, dx$ dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha

$$\int \text{sen}^2 x \, dx + \int \text{sen}^2 x \, dx = -\text{sen } x \text{ cos } x + x + c \rightarrow 2 \int \text{sen}^2 x \, dx = x - \text{sen } x \text{ cos } x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 e posto $\frac{c}{2} = k$ si ottiene

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } x \text{ cos } x}{2} + k$$

N.B.: se si applica la regola della duplicazione del seno, ossia $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \text{ cos } x$ si ha

$$\int \text{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{2 \cdot \text{sen } x \text{ cos } x}{2 \cdot 2} + k = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + k$$

Esercizio n°8

$$\int \cos^2 x \, dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} - \int \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} \, dx$$

Essendo $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$ allora l'integrale indefinito dato si può scrivere

$$= \int \cos x \cdot \cos x \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \cos x$ e $\overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = \cos x$ quindi

$$\int \cos x \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x)}^{\text{primitiva } f} = \cos x &\rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{derivata } f} = -\sin x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{\text{derivata } g} = \cos x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{\text{primitiva } g} = \sin x \\ &= \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \cdot \cos x \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Ricordando che per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ allora

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

quindi

$$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

Per la proprietà additiva degli integrali si ottiene

$$= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Quindi sussiste la seguente equazione

$$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Trasportando la quantità $-\int \cos^2 x \, dx$ dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha

$$\int \cos^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + x + c \rightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 e posto $\frac{c}{2} = k$ si ottiene

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + k$$

N.B.: se si applica la regola della duplicazione del seno, ossia $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ si ha

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{2 \cdot \sin x \cos x}{2 \cdot 2} + k = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + k$$