INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni definite la prima nell'insieme F e la seconda nell'insieme G, se l'insieme intersezione non è vuoto, cioè $F \cap G \neq \emptyset$ allora ha senso parlare del prodotto delle due funzioni suddette, ossia esiste la funzione $y = f(x) \cdot g(x)$ definita nel dominio $F \cap G$. Inoltre, supponendo che le due funzioni siano continue e dotate di derivata prima continua si vuole calcolare il differenziale del prodotto, ricordando l'analogia che sussiste con la regola della derivata del prodotto di due funzioni, si ottiene

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ DERIVATA DEL PRODOTTO

$d[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)\, dx \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\, dx$ DIFFERENZIALE DEL PRODOTTO

Integrando ambo i membri la seconda equazione e ricordando che l'integrale del differenziale di una funzione è la funzione stessa (a meno di una costante) e la proprietà additiva degli integrali, cioè che l'integrale di una somma è la somma degli integrali ha senso scrivere

$$\int d[f(x) \cdot g(x)] = \int [f'(x)\, dx \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\, dx]$$

$$f(x)\, g(x) = \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Isolando i due integrali dallo stesso membro, si ottiene la regola di integrazione per parti

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono dette fattore finiti, mentre le funzioni $g'(x)\, dx$ e $f'(x)\, dx$ sono chiamate fattori differenziali, quindi si ha il seguente schema

$$\int \underbrace{f(x)}_{fattore\ finito\ f} \underbrace{g'(x)\, dx}_{fattore\ differenziale\ g} = \underbrace{f(x)}_{fattore\ finito\ f} \underbrace{g(x)}_{fattore\ finito\ g} - \int \overbrace{f'(x) \underbrace{g(x)}_{fattore\ finito\ g} dx}^{fattore\ differenziale\ f}$$

cioè

"L'integrale del prodotto di un fattore finito $f(x)$ per un fattore differenziale $g'(x)\, dx$ è uguale al prodotto del fattore finito $f(x)$ per l'integrale $g(x)$ del fattore differenziale $g'(x)\, dx$, meno l'integrale del prodotto tra il differenziale $f'(x)\, dx$ del fattore finito $f(x)$ e l'integrale $g(x)$ del fattore differenziale $g'(x)\, dx$".

Oppure

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} dx$$

ESERCIZI SVOLTI

Esercizio n°1

$$\int x\, e^x\, dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} \overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\, f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} = x$ **e** $\overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} = e^x$ **quindi**

$$\int x\, e^x\, dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} = x \rightarrow \overbrace{f'(x)}^{derivata\, f} = 1 \;\; e \;\; \overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} = e^x$$

$$= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + k = e^x(x-1) + k$$

Esercizio n°2

$$\int x^2\, e^x\, dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} \overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\, f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} = x^2$ **e** $\overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} = e^x$ **quindi**

$$\int x^2\, e^x\, dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\, f} = x^2 \rightarrow \overbrace{f'(x)}^{derivata\, f} = 2x \;\; e \;\; \overbrace{g'(x)}^{derivata\, g} = e^x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{primitiva\, g} = e^x$$

$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx = x^2\, e^x - 2 \underbrace{\int x\, e^x\, dx}_{esercizio\; n°1} = x^2\, e^x - 2e^x(x-1) + k = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + k$$

Esercizio n°3

$$\int \ln x \, dx$$

N.B.: poiché $\ln x$ si può scrivere uguale a $\ln x \cdot 1$allora l'integrale indefinito dato diventa

$$= \int \ln x \cdot 1 \, dx =$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = \ln x$ e $\overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = 1$ quindi

$$\int \ln x \cdot 1 \, dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = \ln x \to \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} = \frac{1}{x} \quad e \quad \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = 1 \to \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} = x$$

$$= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + k = x(\ln x - 1) + k$$

Esercizio n°4

$$\int x \ln x \, dx$$

N.B.: per la proprietà commutativa $x \cdot \ln x = \ln x \cdot x$ allora l'integrale indefinito dato diventa

$$= \int \ln x \cdot x \, dx =$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} \, dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} \, dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = \ln x$ e $\overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = 1$ quindi

$$\int \ln x \cdot x \, dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = \ln x \to \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} = \frac{1}{x} \quad e \quad \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = x \to \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} = \frac{x^2}{2}$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + k$$

Esercizio n°6

$$\int sen\,x\,e^x\,dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\,f}\ \overbrace{g'(x)}^{derivata\,g}\ dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\,f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\,g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\,f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\,g}\ dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\,f} = sen\,x$ e $\overbrace{g'(x)}^{derivata\,g} = e^x$ quindi

$$\int sen\,x\,e^x\,dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\,f} = sen\,x \to \overbrace{f'(x)}^{derivata\,f} = cos\,x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{derivata\,g} = e^x \to \overbrace{g(x)}^{primitiva\,g} = e^x$$

$$= sen\,x \cdot e^x - \int cos\,x \cdot e^x\,dx = sen\,x\,e^x - \int cos\,x\,e^x\,dx$$

Per risolvere $\int cos\,x\,e^x\,dx$ si applica di nuovo la regola dell'integrazione per parti

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\,f} = cos\,x$ e $\overbrace{g'(x)}^{derivata\,g} = e^x$ quindi

$$\int cos\,x\,e^x\,dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\,f} = cos\,x \to \overbrace{f'(x)}^{derivata\,f} = -sen\,x \text{ e } \overbrace{g'(x)}^{derivata\,g} = e^x \to \overbrace{g(x)}^{primitiva\,g} = e^x$$

$$= cos\,x \cdot e^x - \int (-sen\,x) \cdot e^x\,dx = cos\,x\,e^x + \int sen\,x\,e^x\,dx$$

Pertanto, l'integrale indefinito iniziale, cioè

$$\int sen\,x\,e^x\,dx$$

è uguale a

$$sen\,x\,e^x - \int cos\,x\,e^x\,dx$$

Ma

$$\int cos\,x\,e^x\,dx$$

è uguale a

$$cos\,x\,e^x + \int sen\,x\,e^x\,dx$$

Quindi sussiste la seguente relazione

$$\int sen\,x\,e^x\,dx = sen\,x\,e^x - \int cos\,x\,e^x\,dx = sen\,x\,e^x - cos\,x\,e^x - \int sen\,x\,e^x\,dx$$

Cioè

$$\int sen\,x\,e^x\,dx = sen\,x\,e^x - cos\,x\,e^x - \int sen\,x\,e^x\,dx$$

Trasportando la quantità $-\int sen\,x\,e^x\,dx$ dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha

$$\int sen\,x\,e^x\,dx + \int sen\,x\,e^x\,dx = sen\,x\,e^x - cos\,x\,e^x + c$$

Ossia

$$2\int sen\,x\,e^x\,dx = sen\,x\,e^x - cos\,x\,e^x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 si può scrivere

$$\frac{2}{2}\int sen\,x\,e^x\,dx = \frac{sen\,x\,e^x - cos\,x\,e^x}{2} + \frac{c}{2}$$

Mettendo in evidenza il fattore comune totale e^x

e posto

$$\frac{c}{2} = k$$

si ottiene

$$\int sen\,x\,e^x\,dx = \frac{e^x}{2}(sen\,x - cos\,x) + k$$

Osservazione

Procedendo con lo stesso metodo si ottiene che

$$\int cos\,x\,e^x\,dx = \frac{e^x}{2}(sen\,x + cos\,x) + k$$

Esercizio n°7

$$\int sen^2x\ dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f}\ \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g}\ dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g}\ dx$$

Essendo $sen^2x = sen\,x \cdot sen\,x$ allora l'integrale indefinito dato si può scrivere

$$= \int sen\,x \cdot sen\,x\ dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = sen\,x$ **e** $\overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = sen\,x$ **quindi**

$$\int sen\,x\ sen\,x\,dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = sen\,x \to \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} = cos\,x\ \ e\ \ \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = sen\,x \to \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} = -cos\,x$$

$$= sen\,x \cdot (-cos\,x) - \int cos\,x \cdot (-cos\,x)\,dx = -sen\,x\,cos\,x + \int cos^2 x\ dx$$

Ricordando che per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha $cos^2 x + sen^2 x = 1$ allora

$$cos^2 x = 1 - sen^2 x$$

quindi

$$\int sen^2x\ dx = -sen\,x\,cos\,x + \int cos^2 x\ dx = -sen\,x\,cos\,x + \int (1 - sen^2 x)\,dx =$$

Per la proprietà additiva degli integrali si ottiene

$$= -sen\,x\,cos\,x + \int dx - \int sen^2 x\,dx = -sen\,x\,cos\,x + x - \int sen^2 x\,dx$$

Quindi sussiste la seguente equazione

$$\int sen^2x\ dx = -sen\,x\,cos\,x + x - \int sen^2 x\,dx$$

Trasportando la quantità $-\int sen^2 x\,dx$ dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha

$$\int sen^2x\ dx + \int sen^2x\ dx = -sen\,x\,cos\,x + x + c \to 2\int sen^2x\ dx = x - sen\,x\,cos\,x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 e posto $\frac{c}{2} = k$ si ottiene

$$\int sen^2x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\,x\,cos\,x}{2} + k$$

N.B.: se si applica la regola della duplicazione del seno, ossia $sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x$ si ha

$$\int sen^2x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{2 \cdot sen\,x\,cos\,x}{2 \cdot 2} + k = \frac{x}{2} - \frac{sen\,2x}{4} + k$$

Esercizio n°8

$$\int cos^2 x\ dx$$

SCHEMA

$$\int \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f}\ \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g}\ dx = \overbrace{f(x)}^{primitiva\ f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} - \int \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f}\ \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g}\ dx$$

Essendo $cos^2 x = cos\ x \cdot cos\ x$ allora l'integrale indefinito dato si può scrivere

$$= \int cos\ x \cdot cos\ x\ dx$$

Si pone $\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = cos\ x$ **e** $\overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = cos\ x$ **quindi**

$$\int cos\ x\ cos\ x\ dx =$$

$$\overbrace{f(x)}^{primitiva\ f} = cos\ x \rightarrow \overbrace{f'(x)}^{derivata\ f} = -sen\ x\ \ e\ \ \overbrace{g'(x)}^{derivata\ g} = cos\ x \rightarrow \overbrace{g(x)}^{primitiva\ g} = sen\ x$$

$$= cos\ x \cdot sen\ x - \int (-sen\ x) \cdot sen\ x\ dx = cos\ x\ sen\ x + \int sen^2\ x\ dx$$

Ricordando che per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha $cos^2\ x + sen^2\ x = 1$ allora

$$sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$$

quindi

$$\int cos^2 x\ dx = cos\ x\ sen\ x + \int sen^2\ x\ dx = cos\ x\ sen\ x + \int (1 - cos^2\ x)\ dx =$$

Per la proprietà additiva degli integrali si ottiene

$$= cos\ x\ sen\ x + \int dx - \int cos^2\ x\ dx = cos\ x\ sen\ x + x - \int cos^2\ x\ dx$$

Quindi sussiste la seguente equazione

$$\int cos^2 x\ dx = cos\ x\ sen\ x + x - \int cos^2\ x\ dx$$

Trasportando la quantità $-\int cos^2\ x\ dx$ **dal secondo membro al primo membro dell'equazione si ha**

$$\int cos^2 x\ dx + \int cos^2 x\ dx = cos\ x\ sen\ x + x + c \rightarrow 2 \int cos^2 x\ dx = cos\ x\ sen\ x + x + c$$

Dividendo ambo i membri per 2 e posto $\frac{c}{2} = k$ **si ottiene**

$$\int cos^2 x\ dx = \frac{cos\ x\ sen\ x}{2} + \frac{x}{2} + k$$

N.B.: se si applica la regola della duplicazione del seno, ossia $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x$ si ha

$$\int cos^2 x\ dx = \frac{x}{2} + \frac{2 \cdot sen\ x\ cos\ x}{2 \cdot 2} + k = \frac{x}{2} + \frac{sen\ 2x}{4} + k$$