

ESERCIZIO SVOLTO

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$

La funzione data è algebrica irrazionale intera dove il radicando è un trinomio di secondo grado, scritta in forma esplicita, per determinare il campo di esistenza si pone il radicando maggiore o uguale a zero (si osserva che la radice è di indice pari), cioè

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 &> 0 \text{ disequazione propria} \\ x^2 - 8x + 7 &\geq 0 \rightarrow \\ x^2 - 8x + 7 &= 0 \text{ equazione associata} \end{aligned}$$

Per risolvere la disequazione suddetta si passa inizialmente alla risoluzione della sua equazione "interna" associata, ossia

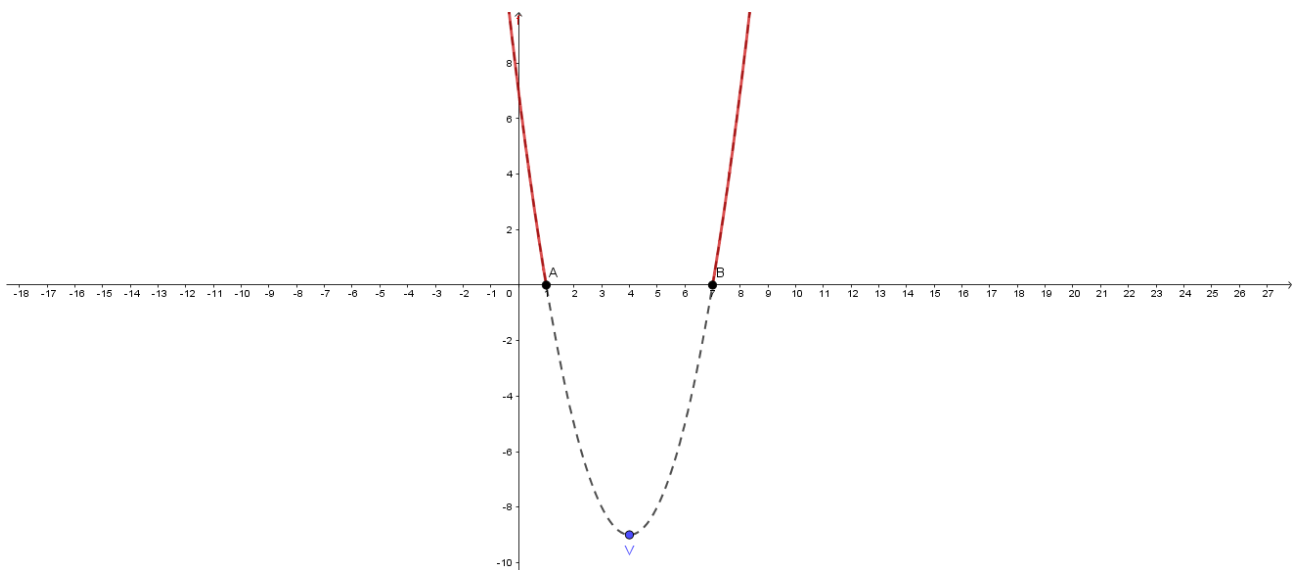
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

Ricordando che $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si ha

$$\Delta = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 7 \end{matrix}$$

Per calcolare le soluzioni della disequazione $x^2 - 8x + 7 > 0$ si può applicare il **metodo della risoluzione grafica**, pertanto, ponendo $y = x^2 - 8x + 7$ si ottiene un'equazione bidimensionale, che nel piano cartesiano è rappresentata da una parabola. La curva interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(1; 0)$ e $B(7; 0)$, e ha il vertice nel punto $V(4; -9)$. La disequazione $x^2 - 8x + 7 > 0$ è verificata per tutti i punti del grafico della parabola situati al di sopra dell'asse delle ascisse (per tutti i valori delle ascisse che hanno immagini positive), cioè $x < 1 \vee x > 7$, ossia per tutti i valori **esterni** all'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata.

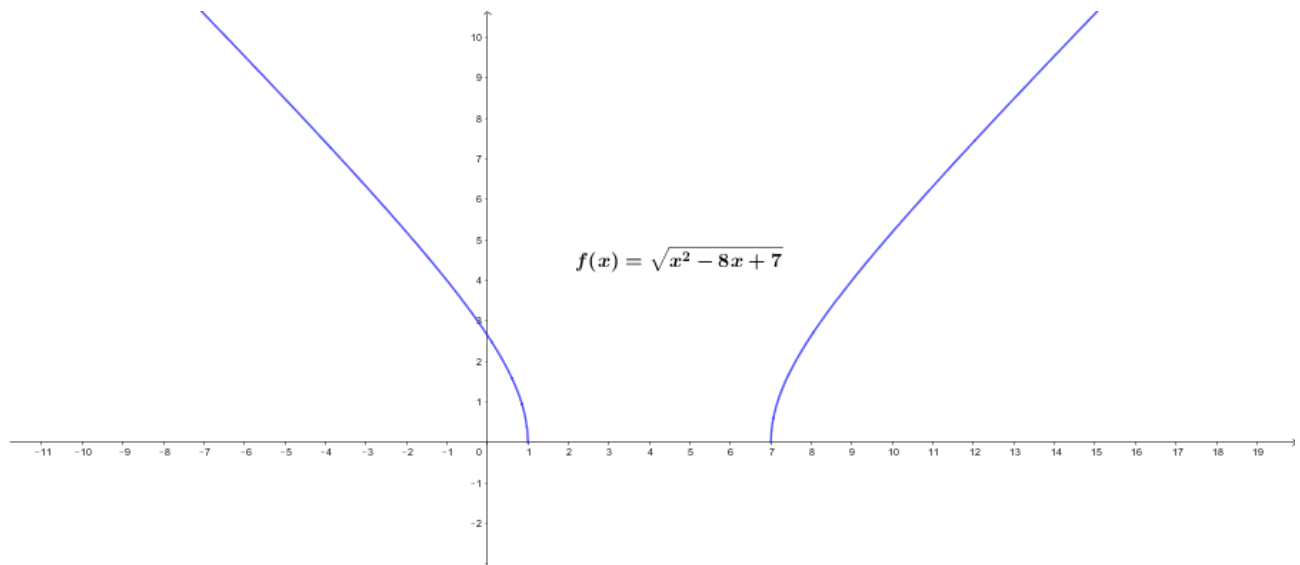


Pertanto, la disequazione $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ è verificata per $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ e cioè per $x \leq 1 \vee x \geq 7$.
 $x < 1 \vee x > 7$

Quindi, il dominio della funzione data è **C.E.:** $\forall x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \vee x \geq 7$ oppure $]-\infty; 1] \cup [7; +\infty[$.

Infatti costruendo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$ si osserva che il disegno si estende per

$$\forall x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \vee x \geq 7$$



Metodo algebrico

$$x^2 - 8x + 7 \geq 0$$

Il trinomio che si trova al primo membro della disequazione si può scomporre nel seguente modo

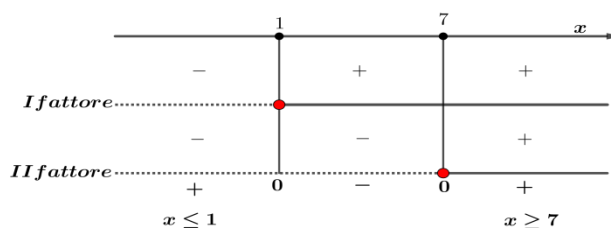
$$(x - 1)(x - 7) \geq 0$$

Il prodotto $(x - 1)(x - 7)$ è positivo quando i due fattori hanno lo stesso segno, pertanto, ponendo che entrambi siano positivi, si ha

$$I \text{ fattore: } x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$II \text{ fattore: } x - 7 \geq 0 \rightarrow x \geq 7$$

Schematizzando sull'asse delle ascisse si ottiene



Regola algebrica

a	Δ	$ax^2 + bx + c$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$
$>$	$>$	$\geq$	