

ESERCIZIO SVOLTO

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$

La funzione data è algebrica irrazionale intera di secondo grado (semicirconferenza), scritta in forma esplicita, per determinare il campo di esistenza si pone il radicando maggiore o uguale a zero (si osserva che la radice è di indice pari), cioè

$$-x^2 + 8x \geq 0 \rightarrow x^2 - 8x \leq 0 \rightarrow \begin{array}{l} x^2 - 8x < 0 \text{ disequazione propria} \\ x^2 - 8x = 0 \text{ equazione associata} \end{array}$$

Per risolvere la disequazione suddetta si passa inizialmente alla risoluzione della sua equazione "interna" associata, ossia

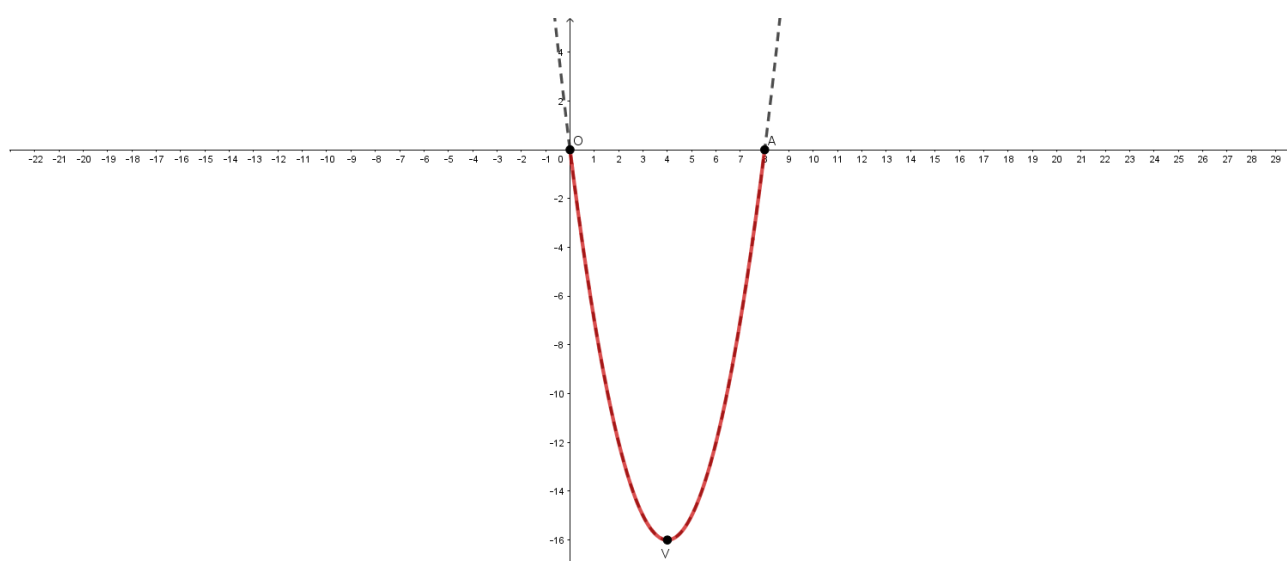
$$x^2 - 8x = 0$$

Ricordando che $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si ha

$$\Delta = 64 > 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{8 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{array}$$

Per calcolare le soluzioni della disequazione $x^2 - 8x < 0$ si può applicare il **metodo della risoluzione grafica**, pertanto, ponendo $y = x^2 - 8x$ si ha un'equazione bidimensionale, che nel piano cartesiano è rappresentata da una parabola. La curva interseca l'asse delle ascisse nei punti $O(0; 0)$ e $A(8; 0)$, e ha il vertice nel punto $V(4; -16)$. La disequazione $x^2 - 8x < 0$ è verificata per tutti i punti del grafico della parabola situati al di sotto dell'asse delle ascisse (per tutti i valori delle ascisse che hanno immagini negative), cioè $1 < x < 8$, ossia per tutti i valori **interni** all'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata.



$$x_1 = 0, x_2 = 8$$

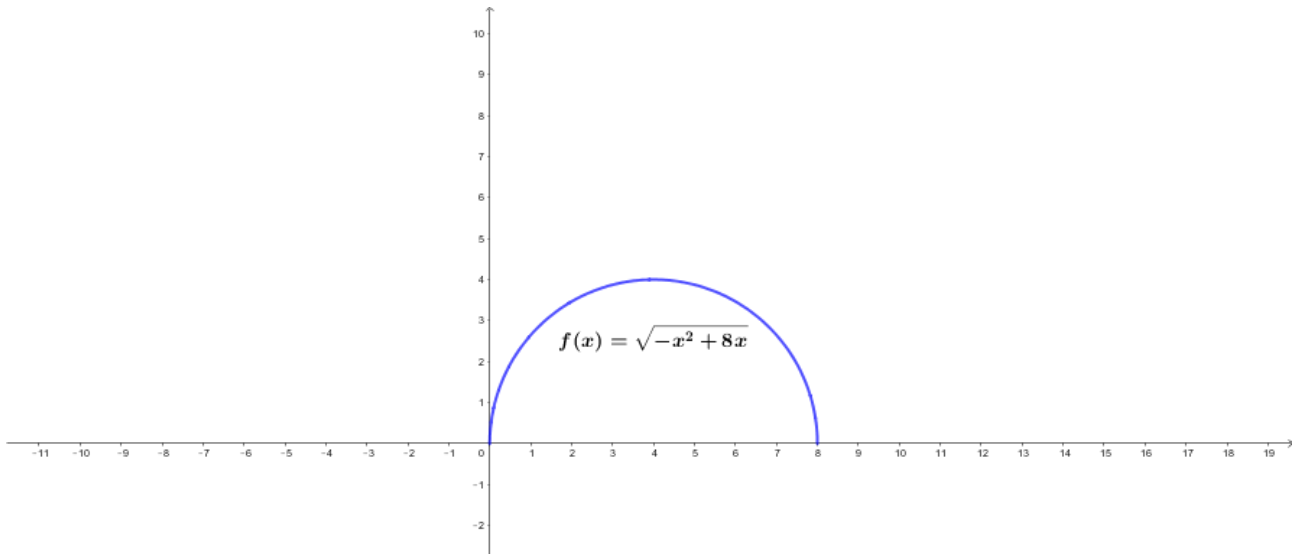
Pertanto, la disequazione $x^2 - 8x \leq 0$ è verificata per e cioè per $1 < x \leq 8$.

$$1 < x < 8$$

Quindi, il dominio della funzione data è **C.E.:** $\forall x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 8$.

Infatti costruendo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$ si osserva che il disegno si estende per

$$\forall x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 8$$



Metodo algebrico

$$-x^2 + 8x \geq 0$$

Il binomio che si trova al primo membro della disequazione si può scomporre nel seguente modo

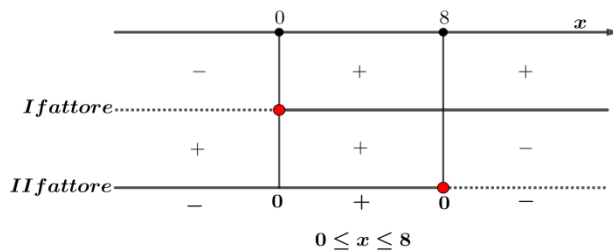
$$x(-x + 8) \geq 0$$

Il prodotto $x(-x + 8)$ è positivo quando i due fattori hanno lo stesso segno (concordi), pertanto, ponendo che entrambi siano positivi, si ha

$$I \text{ fattore: } x \geq 0$$

$$II \text{ fattore: } -x + 8 \geq 0 \rightarrow x - 8 \leq 0 \rightarrow x \leq 8$$

Schematizzando sull'asse delle ascisse si ottiene



Regola algebrica

a	Δ	$ax^2 + bx + c$	
$<$	$>$	\geq	$x_1 \leq x \leq x_2$
$>$	$>$	\leq	