

ESERCIZIO SVOLTO

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$

La funzione data è algebrica irrazionale intera dove il radicando è un binomio di secondo grado (**semiiperbole**), scritta in forma esplicita, per determinare il campo di esistenza si pone il radicando maggiore o uguale a zero (si osserva che la radice è di indice pari), ossia

$$\begin{aligned} x^2 - 8x > 0 & \text{ disequazione propria} \\ x^2 - 8x \geq 0 & \rightarrow \\ x^2 - 8x = 0 & \text{ equazione associata} \end{aligned}$$

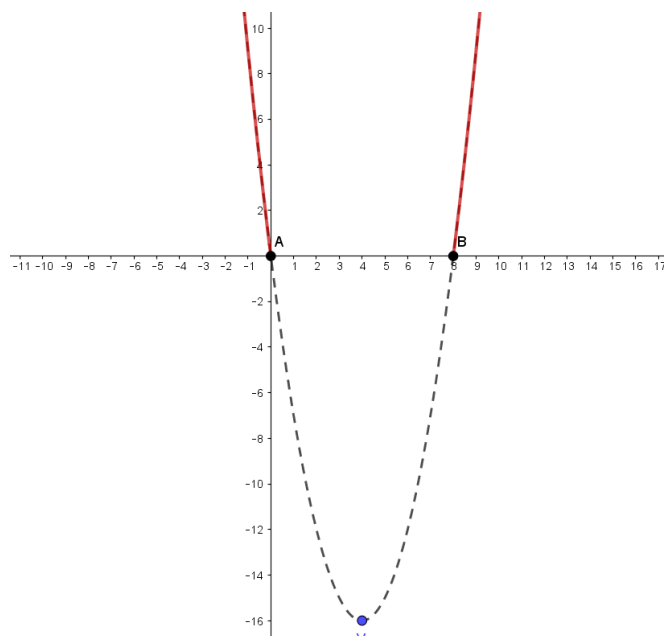
Per risolvere la disequazione suddetta si passa inizialmente alla risoluzione della sua equazione associata cioè

$$x^2 - 8x = 0$$

$$\text{Ricordando che } \Delta = b^2 - 4ac \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ si ha}$$

$$\Delta = 64 > 0 \text{ e } x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{8 \pm 8}{2} \nearrow x_1 = 0 \searrow x_2 = 8$$

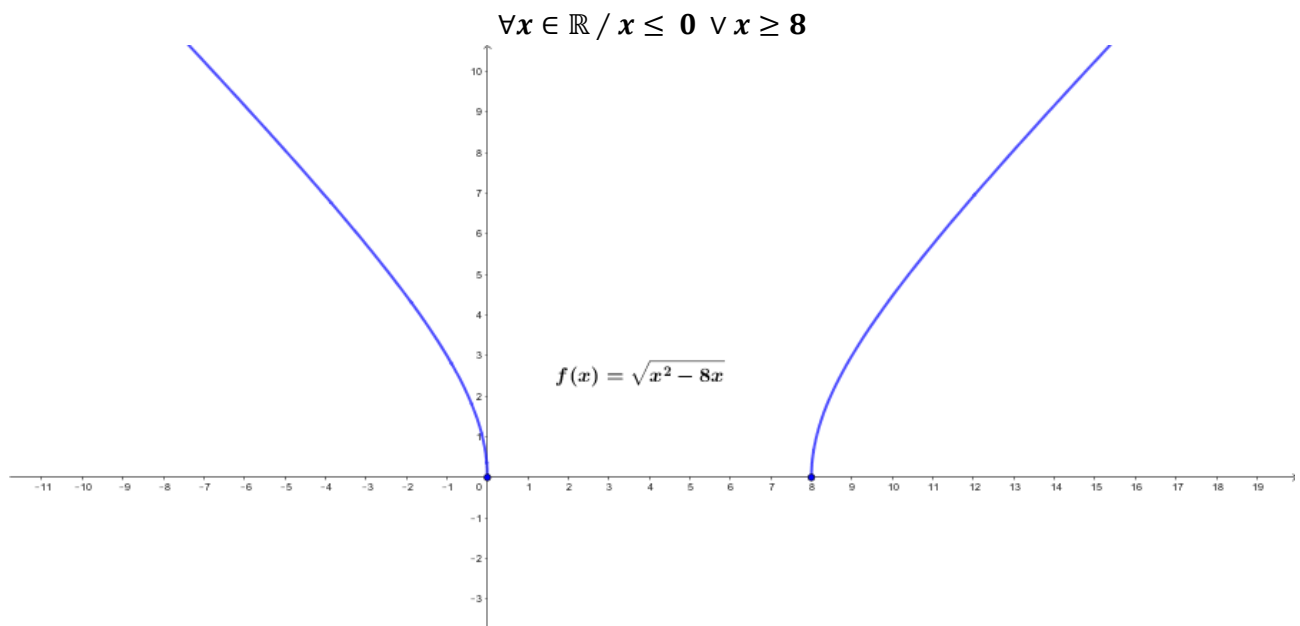
Per calcolare le soluzioni della disequazione $x^2 - 8x > 0$ si può applicare il **metodo della risoluzione grafica**, pertanto, ponendo $y = x^2 - 8x$ si ottiene un'equazione bidimensionale, che nel piano cartesiano è rappresentata da una parabola. La curva interseca l'asse delle ascisse nei punti $O(0;0)$ e $A(8;0)$, e ha il vertice nel punto $V(4;-16)$. La disequazione $x^2 - 8x > 0$ è verificata per tutti i punti del grafico della parabola situati al di sopra dell'asse delle ascisse (per tutti i valori delle ascisse che hanno immagini positive), cioè $x < 0 \vee x > 8$, ossia per tutti i valori **esterni** all'intervallo delle soluzioni dell'equazione associata.



Pertanto, la disequazione $x^2 - 8x \geq 0$ è verificata per $x_1 = 0, x_2 = 8$ e cioè per $x \leq 0 \vee x \geq 8$.
 $x < 0 \vee x > 8$

Quindi, il dominio della funzione data è **C.E.:** $\forall x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \vee x \geq 8$ (**simbologia insiemistica**) oppure $]-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$ (**simbologia topologica**).

Infatti costruendo il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$ si osserva che il disegno si estende per



Metodo algebrico

$$x^2 - 8x \geq 0$$

Il binomio che si trova al primo membro della disequazione si può scomporre nel seguente modo

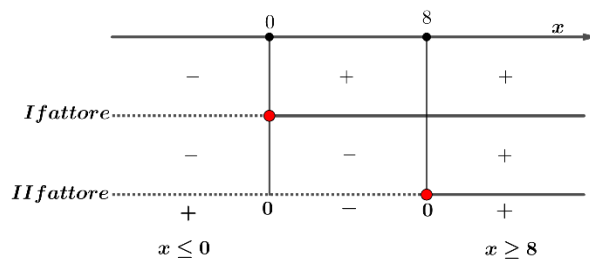
$$x(x - 8) \geq 0$$

Il prodotto $x(x - 8)$ è positivo quando i due fattori hanno lo stesso segno (concordi), pertanto, ponendo che entrambi siano positivi, si ha

$$I \text{ fattore: } x \geq 0$$

$$II \text{ fattore: } x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 8$$

Schematizzando sull'asse delle ascisse si ottiene



Regola algebrica

a	Δ	$ax^2 + bx + c$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$
$>$	$>$	$\geq$	