PUNTO DI CUSPIDE

Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha nell'origine degli assi cartesiani un punto di cuspide.

Si ricorda che una funzione f ha in x_0 un punto di cuspide se i due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti e di segno opposto.

La funzione data è definita nel seguente modo

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & se\ x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

Si calcola la sua derivata prima nel punto di ascissa x_0 , pertanto, per definizione si ottiene

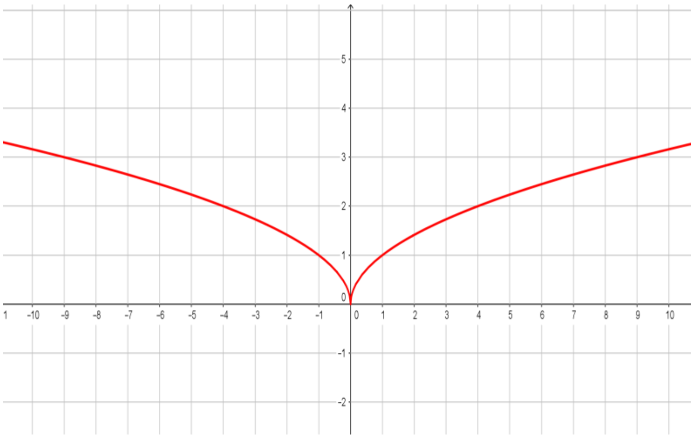
$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(x_0) = lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \\ f'_-(x_0) = lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \end{cases}$$

Sapendo che $f(x_0 + h) = \sqrt{0+h}$ e $f(x_0) = \sqrt{0}$ quando $x \geq 0$

Mentre $f(x_0 + h) = \sqrt{0-h}$ e $f(x_0) = \sqrt{0}$ quando $x < 0$ sostituendo si ha

$$= \begin{cases} lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = +\infty \\ lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{-h}}{h} = -\infty \end{cases}$$

Essendo i due limiti suddetti infiniti (confronto tra infiniti) e di segno opposto si può affermare che l'origine degli assi cartesiani è un punto cuspidale.



.