PUNTO ANGOLOSO

Verificare che la funzione $f(x) = |x|$ ha nell'origine degli assi cartesiani un punto angoloso.

Si ricorda che una funzione f ha in x_0 un punto angoloso se i due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono finiti, ma assumono valori distinti.

La funzione data è definita nel seguente modo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Si calcola la sua derivata prima nel punto di ascissa x_0, pertanto, per definizione si ottiene

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \\ f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \end{cases}$$

Sapendo che $f(x_0+h) = f(0+h) = 0 + h = h$ e $f(x_0) = f(0) = 0$ quando $x \geq 0$ mentre $f(x_0+h) = f(0+h) = 0 - h = -h$ e $f(x_0) = f(0) = 0$ quando $x < 0$ sostituendo si ha

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Essendo i due limiti suddetti finiti ma diversi si può affermare che l'origine degli assi cartesiani è un punto angoloso, ossia un punto di non derivabilità per la funzione.