FRAMMENTI DI TEORIA

1) Concetto di funzione

- La funzione è una legge (o una relazione) che associa ad un elemento $\boldsymbol{x}$ di un insieme (dominio) un solo ed uno solo elemento $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ di un altro insieme (codominio).

2) Classificazione delle funzioni

- ALGEBRICHE
  - RAZIONALI
    - INTERE $y = x^2$
    - FRATTE $y = \frac{1}{x}$
  - IRRAZIONALI
    - INTERE $y = \sqrt{x}$
    - FRATTE $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- TRASCENDENTI (NON ALGEBRICHE)
  - Trigonometriche $y = senx$
  - Logaritmiche $y = log\ x$
  - Esponenziali $y = 2^x$

3) Funzione algebrica

- Si dice algebrica quando la sua equazione ha la forma polinomiale, se non è algebrica si dice trascendente.

4) Funzione razionale

- Si dice razionale quando la variabile $\boldsymbol{x}$ non è sotto il "segno di radice", se non è razionale si dice irrazionale.

5) Funzione intera

- Si dice intera quando la variabile $\boldsymbol{x}$ si trova solo al numeratore, se non è intera si dice fratta o frazionaria.

6) Campo di esistenza o dominio

- **C.E.** o dominio di una funzione è l'insieme X di tutti i valori reali che si possono attribuire alla variabile $\boldsymbol{x}$ per determinare i valori corrispondenti della $\boldsymbol{y}$, ossia le rispettive immagini.

7) **Campo della variabilità**

- **C.V.** o l'insieme immagine di una funzione è l'insieme Y dove i suoi elementi sono tutte le immagini degli elementi di X.

8) **Funzione iniettiva**

- Una funzione iniettiva è una funzione che associa elementi distinti del primo insieme in elementi distinti del secondo insieme.

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

9) **Funzione suriettiva**

- Una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento del secondo insieme è immagine di almeno un elemento del primo insieme. In tal caso si ha che il codominio coincide con l'insieme immagine.

$$\forall y \in Im(f)\ \exists x \in Dom(f) / f(x) = y$$

10) **Funzione biiettiva**

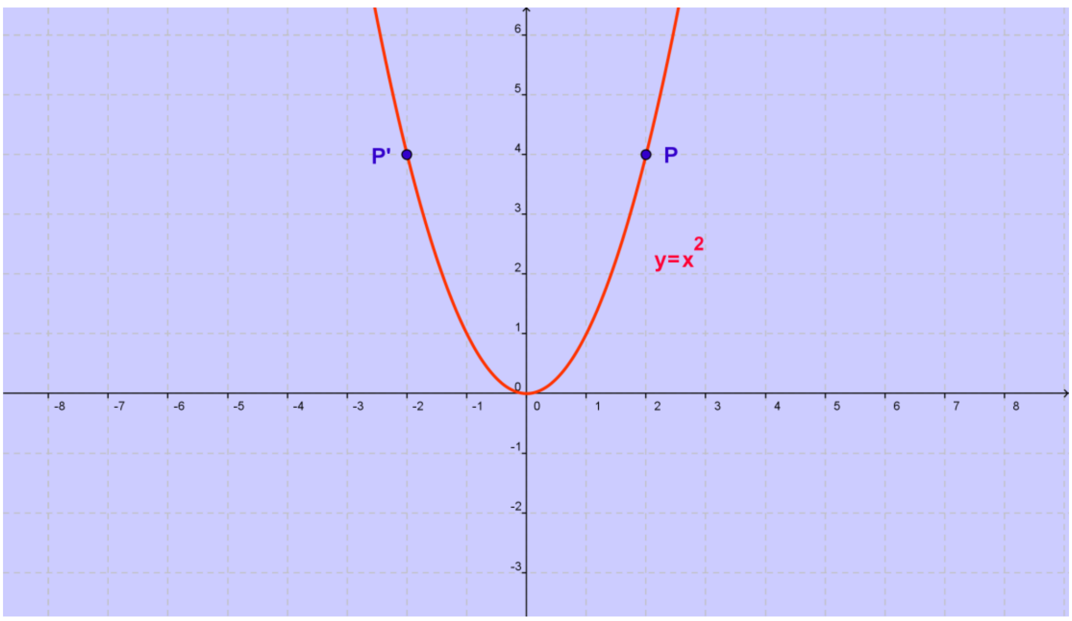
- Una funzione si dice biunivoca o biiettiva quando ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa. Una funzione è biiettiva se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

11) **Funzioni pari e dispari**

❖ La funzione è pari quando è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, ossia

$$f(x) = f(-x)$$

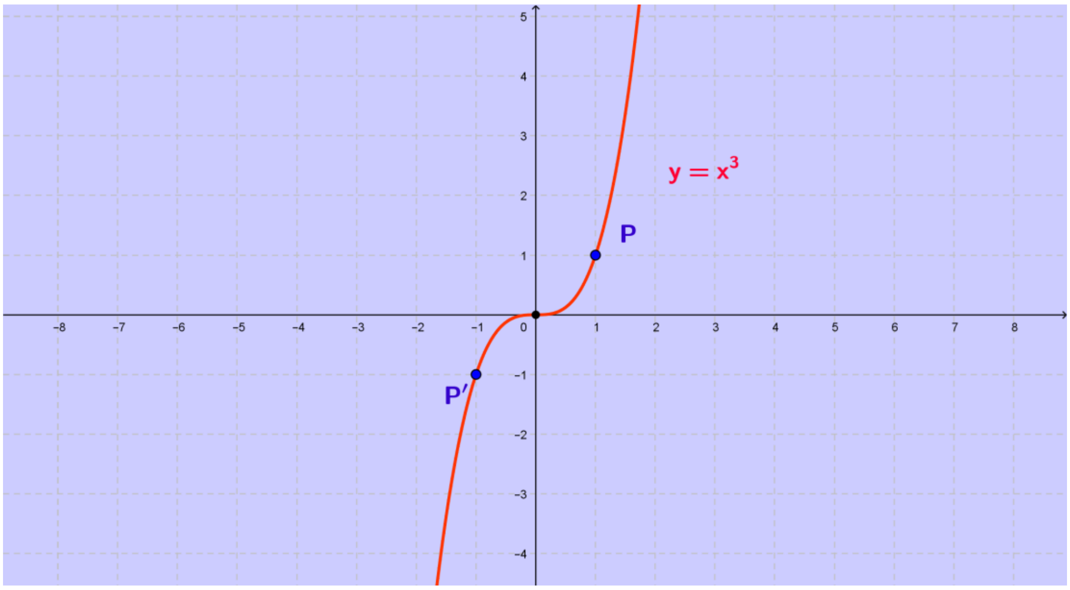
Un esempio di funzione pari è la parabola monomia di equazione: $y = x^2$.



❖ La funzione è dispari quando è simmetrica rispetto all'origine degli assi, ossia

$$f(x) = -f(-x)$$

Un esempio di funzione dispari è la parabola cubica monomia di equazione: $y = x^3$.



12) Funzione monotona

Una funzione monotòna è una funzione che mantiene l'ordinamento tra insiemi ordinati.

13) Classificazione delle funzioni monotone

in senso stretto — in senso largo

in senso stretto: crescente, decrescente

in senso largo: non decrescente, non crescente

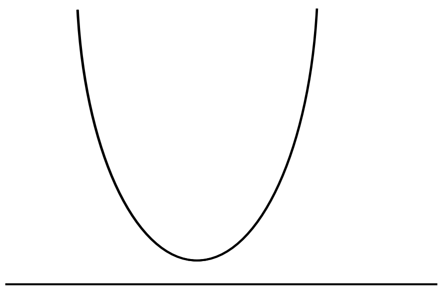
14) Definizioni delle funzioni monotone

- Funzione monotona crescente $\forall x_1, x_2 \in \Re \;\; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Funzione monotona decrescente $\forall x_1, x_2 \in \Re \;\; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Funzione monotona non decrescente $\forall x_1, x_2 \in \Re \;\; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Funzione monotona non crescente $\forall x_1, x_2 \in \Re \;\; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

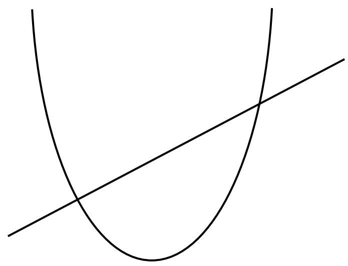
15) Reciproche posizioni tra una retta ed una curva

Per esempio, consideriamo una retta ed una parabola, si presentano tre casi:

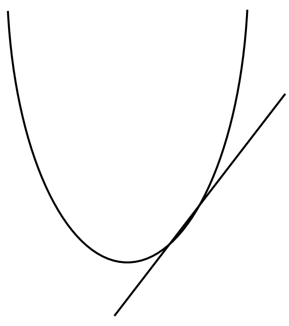
1) La parabola è esterna alla retta, viceversa, la retta è esterna alla parabola (non si intersecano).



2) La parabola è secante alla retta, viceversa, la retta è secante alla parabola (si intersecano in due punti distinti).

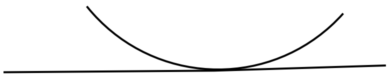


3) La parabola è tangente alla retta, viceversa, la retta è tangente alla parabola (si intersecano in due punti coincidenti).



16) Convessità/concavità di una curva

- Una curva si dice CONVESSA VERSO IL BASSO (CONCAVA VERSO L'ALTO) in un punto se la tangente passante per quel punto si trova al di sotto della curva, viceversa si dice convessa verso l'alto (concava verso il basso).

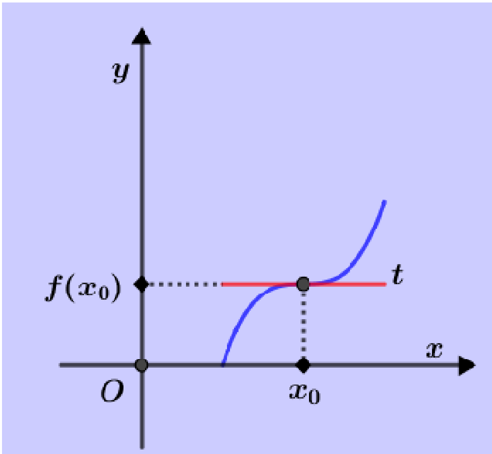


17) Punto di flesso

- Il punto di flesso è un punto dove la curva cambia di concavità, la retta che passa per quel punto è tangente alla curva.

Esempio:

Flesso orizzontale ascendente



18) Classificazione dei punti di flesso

- Vedi schema punti critici di una funzione

19) Punti stazionari

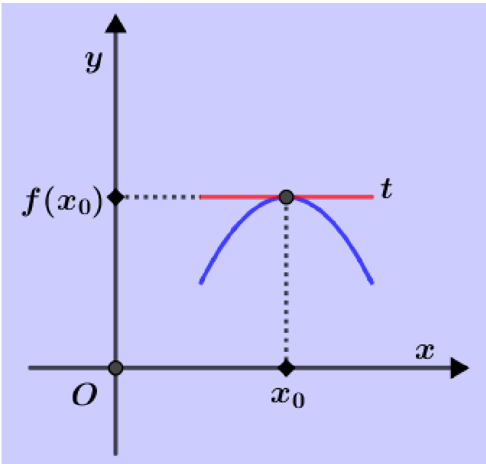
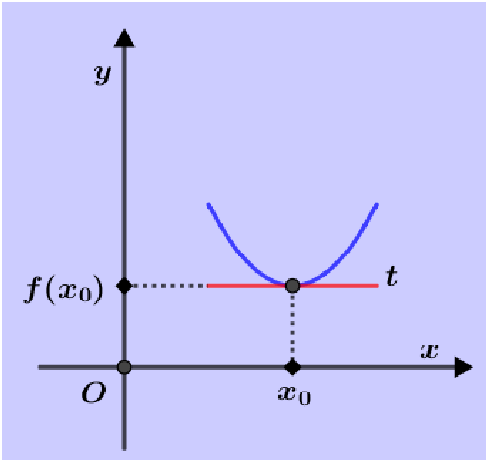
Si chiamano punti stazionari quei punti in cui il grafico della curva ha la tangente orizzontale, pertanto, annullano la derivata prima della funzione.

20) Classificazione dei punti stazionari

- Vedi schema punti critici di una funzione

21) Massimi e minimi relativi

- Si dice che la funzione **f** ha in x_0 un punto di massimo [rispettivamente minimo] relativo se esiste un intorno di x_0 tale che per ogni **x** del dominio in tale intorno si ha che $f(x) \leq f(x_0)$ [rispettivamente $f(x) \geq f(x_0)$].

Massimo relativo	Minimo relativo
	

- L'ascissa x_0 , in generale, si chiama estremante. Se è l'ascissa del punto di massimo si dice massimante, invece se è l'ascissa del punto di minimo si dice minimante.

22) Funzione continua in un punto

- Una funzione si dice continua in un punto di ascissa x_0 se si verifica la seguente uguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Ossia quando si verificano le tre condizioni:

I. Esiste il valore della funzione nel punto di ascissa x_0 ;
II. Esiste il limite finito della funzione per x che tende ad x_0 ;
III. Il limite coincide con il valore della funzione nel punto di ascissa x_0 .

Cioè:

I. $\exists \ f(x_0)$;
II. $\exists \ \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$;
III. $\ell = f(x_0)$.

23) Funzione continua in un intervallo

- Una funzione si dice continua in un intervallo se è continua in tutti i punti dell'intervallo.

24) Punto di discontinuità

- Si definisce punto di discontinuità quel punto di ascissa x_0 dove la funzione non risulta continua.

25) Classificazione dei punti di discontinuità

- Si dice di **prima specie** quando in x_0 esistono finiti i limiti desto e sinistro e sono fra loro distinti, ossia:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- Si dice di **seconda specie** quando in x_0 o non esiste almeno uno dei due limiti, destro e sinistro, oppure quando almeno uno di questi due limiti vale infinito, in quest'ultima ipotesi si dice che la funzione ha, in x_0, un punto di infinito.

- Si dice di **terza specie**, se esiste finito il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ma il valore di $f(x)$ o non esiste in x_0, oppure esiste ma risulta: $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$. In questo caso si dice anche che nel punto si presenta per la funzione una discontinuità eliminabile.

26) Asintoto

- L'asintoto è una retta che risulta essere tangente ad una curva nel suo punto all'infinito. Se la tangente è parallela all'asse delle ordinate allora l'asintoto si dice verticale, se la tangente è parallela all'asse delle ascisse allora l'asintoto si dice orizzontale, se la tangente risulta essere inclinata rispetto agli assi cartesiani allora l'asintoto si dice obliquo.

27) Asintoto verticale

- Si dice che la retta di equazione $x = x_o$ è un asintoto verticale per il grafico della funzione $y = f(x)$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

28) Asintoto orizzontale

- Si dice che la retta di equazione $y = a$ è un asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione $y = f(x)$ se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$.
- Si dice che la retta di equazione $y = a$ è un asintoto orizzontale a sinistra per il grafico della funzione $y = f(x)$ se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.

29) Asintoto obliquo

- Si dice che la retta di equazione $y=mx+n$ è un asintoto obliquo a destra per il grafico della funzione $y=f(x)$ se esistono finiti i seguenti limiti: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ con $m\neq 0$ e $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n$
- Si dice che la retta di equazione $y=mx+n$ è un asintoto obliquo a sinistra per il grafico della funzione $y=f(x)$ se esistono finiti i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ con $m\neq 0$ e $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=n$

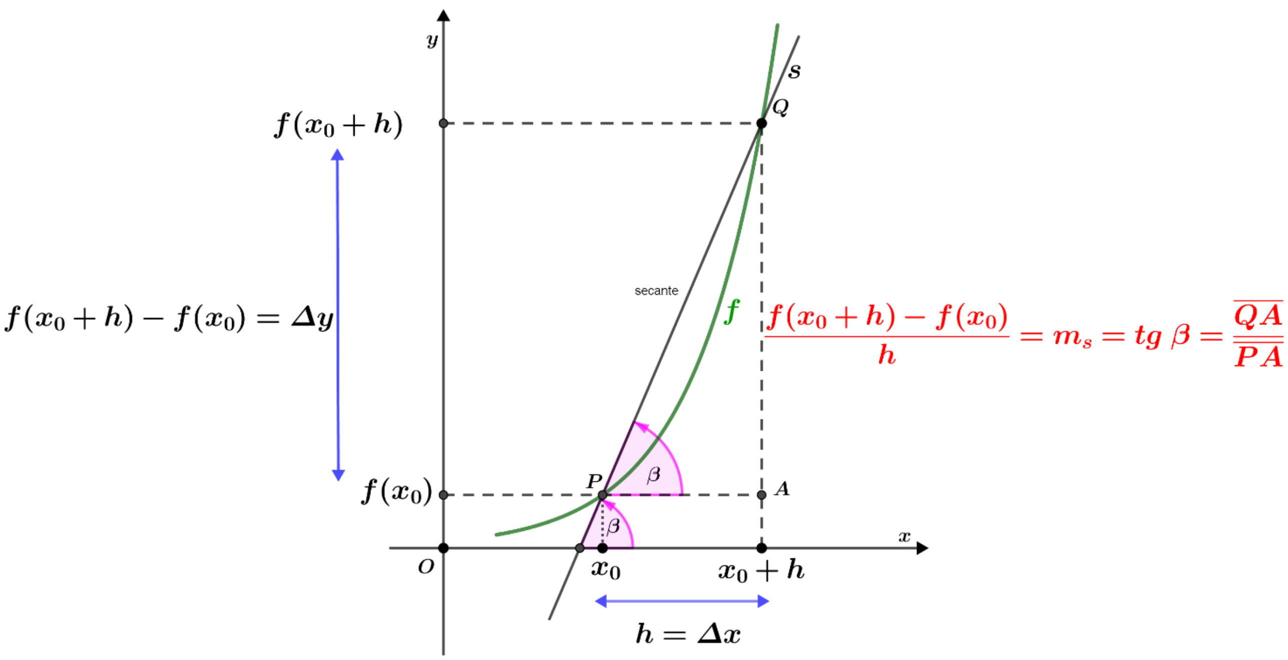
30) Rapporto incrementale

- Si dice rapporto incrementale della funzione $y=f(x)$ relativo al punto di ascissa x_0 e all'incremento h la quantità: $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

  E precisamente si chiama rapporto incrementale destro se $h>0$, mentre si dice rapporto incrementale sinistro se $h<0$.

31) Significato geometrico e trigonometrico del rapporto incrementale

- Il rapporto incrementale di una funzione nell'intorno di un suo punto è il coefficiente angolare della retta secante passante per il punto dato e per il punto di ascissa incrementata, ossia è uguale al valore della tangente trigonometrica dell'angolo che la retta secante forma con l'asse delle ascisse.

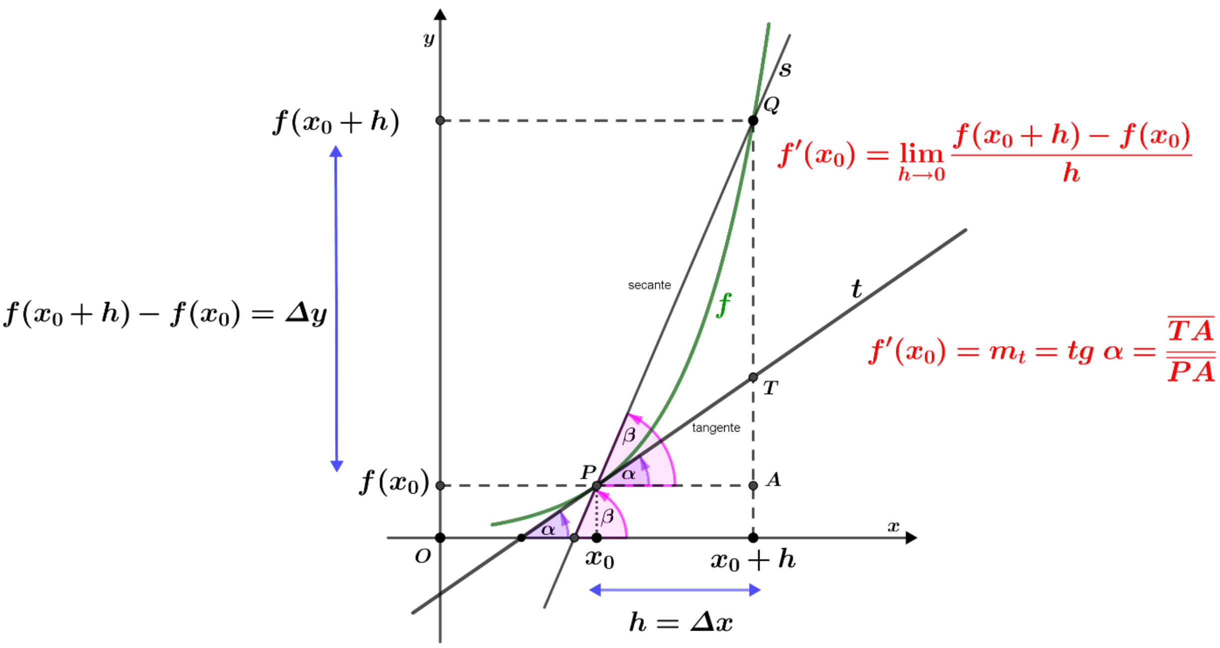


32) Derivata di una funzione

- Si definisce derivata della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento h della variabile, ossia: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. La derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 si suole indicare con una qualunque delle seguenti notazioni: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $D[f(x)]_{x=x_0}$ oppure $\dot{f}(x_0)$.

33) Significato geometrico e trigonometrico della derivata di una funzione

- La derivata di una funzione in un suo punto è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva in quel punto, quindi è uguale al valore della tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente forma con l'asse delle ascisse.



34) Differenziale di una funzione

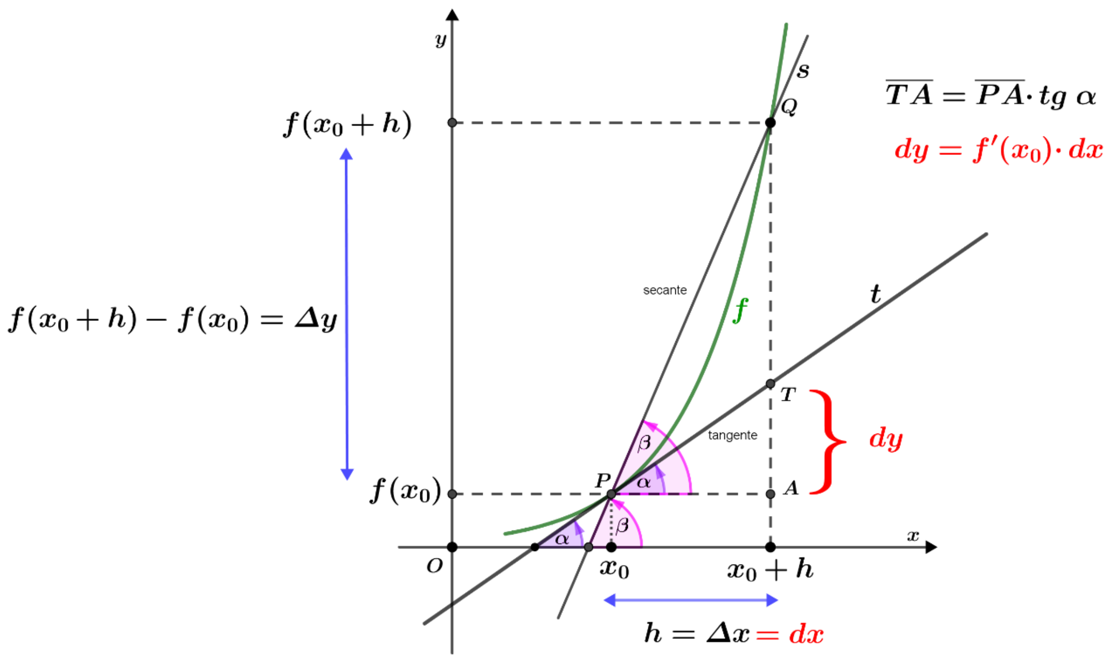
Sia $y = f(x)$ una funzione reale a variabile reale, derivabile nel punto di ascissa x_0 , e indicando con h l'incremento arbitrario relativo a x_0 , si definisce differenziale della funzione $y = f(x)$ il valore dell'ordinata del punto di ascissa $x_0 + h$ calcolata sulla retta tangente alla curva nel punto di ascissa x_0 . Si può asserire che il differenziale di una funzione derivabile è una funzione lineare avente per variabile l'incremento. Il differenziale della funzione $y = f(x)$ si suole indicare con una qualunque delle seguenti notazioni: dy , $df(x_0)$.

35) Significato geometrico del differenziale di una funzione

Tracciato il grafico della funzione $y = f(x)$ e condotta la retta tangente t nel punto di ascissa x_0 della funzione, ossia $P(x_0\,; f(x_0)$ è il punto di tangenza tra la retta e la curva, inoltre sia $Q(x_0 + h\,; f(x_0 + h))$ un ulteriore punto della funzione dove $x_0 + h$ è l'ascissa incrementata, sia inoltre T il punto della retta tangente avente ascissa $x_0 + h$ e $A(x_0 + h\,; f(x_0))$. Osservando il triangolo rettangolo ATP, retto nel vertice A, e applicando un teorema sui triangoli rettangoli della trigonometria, ossia che la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto, allora ha senso scrivere

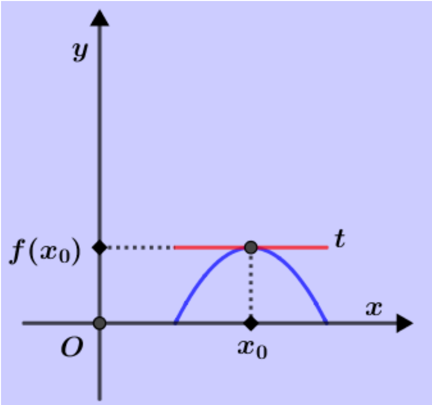
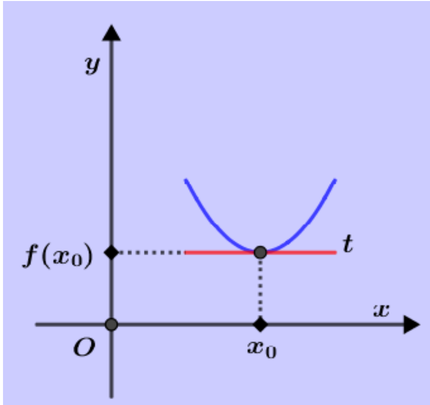
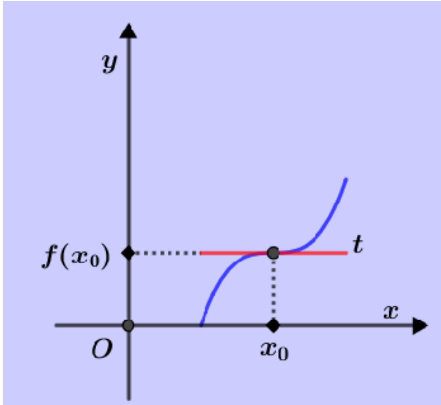
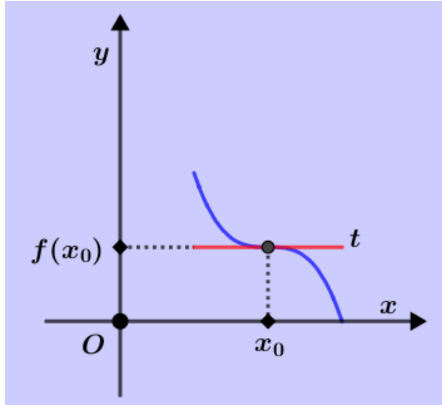
$$\overline{TA} = \overline{PA} \cdot tg\ \alpha$$

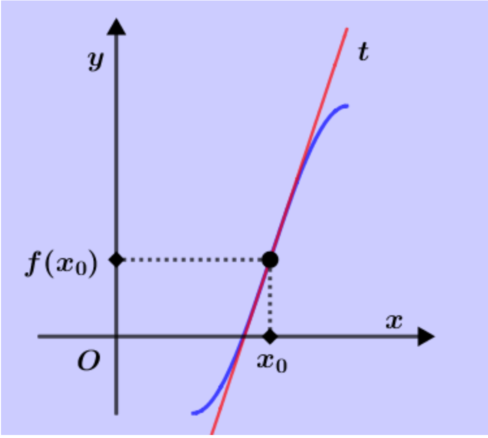
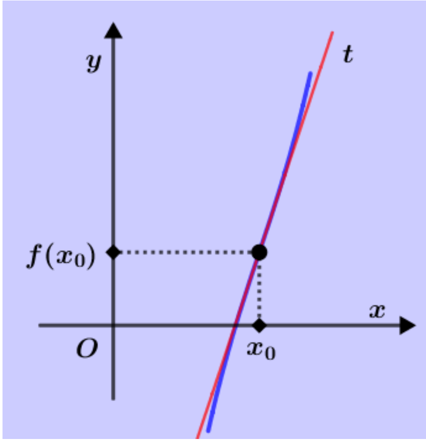
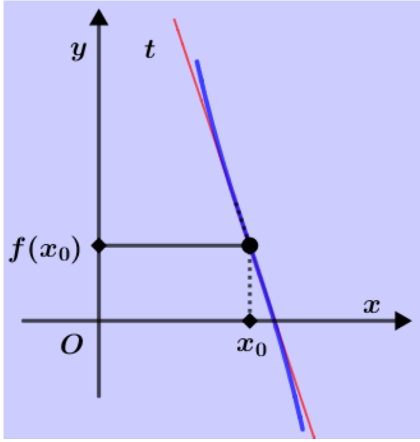
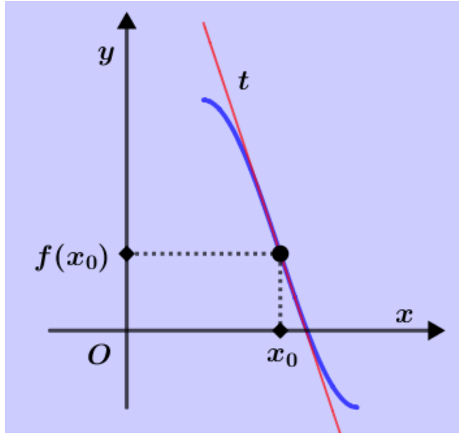
Essendo α l'angolo che la retta tangente t forma con l'asse delle ascisse e per l'interpretazione trigonometrica di derivata, ossia $f'(x_0) = tg\ \alpha$ si ottiene $\overline{TA} = f'(x_0) \cdot \overline{PA}$, ponendo $\overline{TA} = dy$ e $\overline{PA} = dx$ si ha $dy = f'(x_0) \cdot dx$.

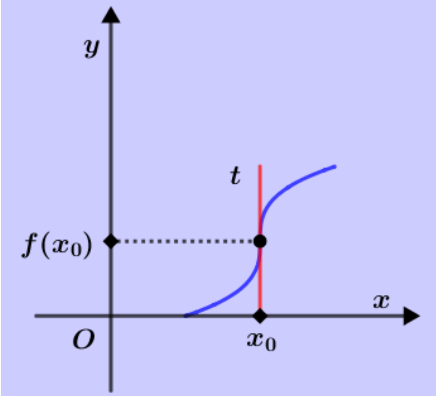
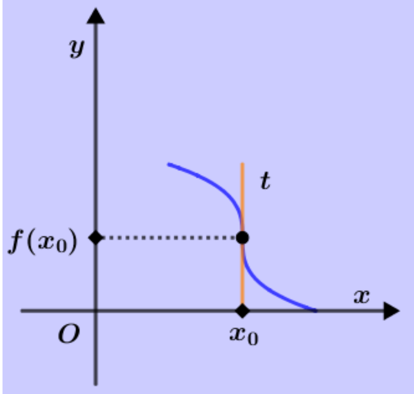
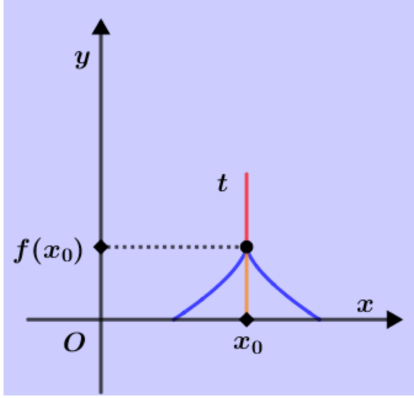
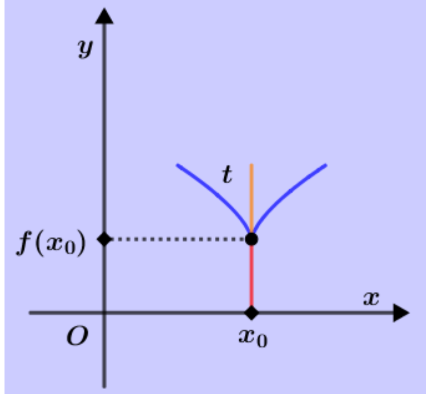


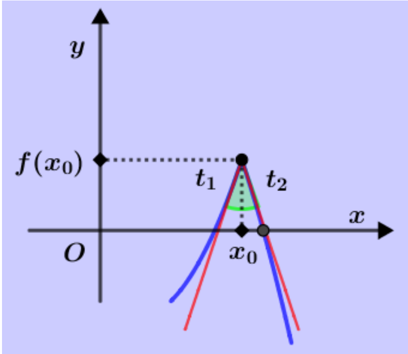
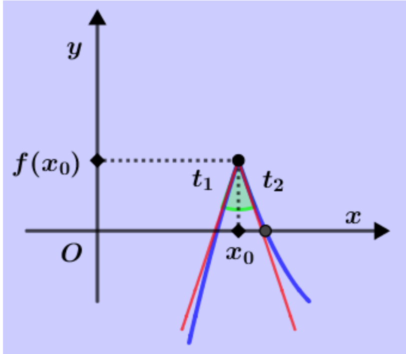
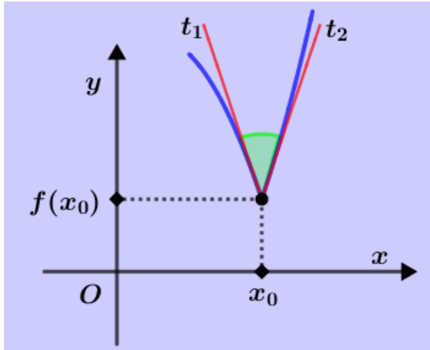
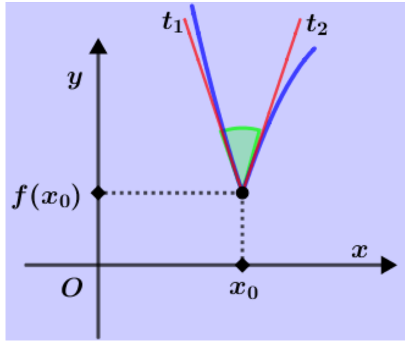
PUNTI CRITICI DI UNA FUNZIONE

CLASSIFICAZIONE

STAZIONARI	Massimo relativo	Minimo relativo	Flesso orizzontale ascendente	Flesso orizzontale discendente
Grafico				
Sequenza segni derivata prima	$+ \quad \mathbf{0} \quad -$	$- \quad \mathbf{0} \quad +$	$+ \quad \mathbf{0} \quad +$	$- \quad \mathbf{0} \quad -$
Sequenza segni derivata seconda	$- \quad - \quad -$	$+ \quad + \quad +$	$- \quad \mathbf{0} \quad +$	$+ \quad \mathbf{0} \quad -$

NON STAZIONARI	Flesso obliquo ascendente	Flesso obliquo ascendente	Flesso obliquo discendente	Flesso obliquo discendente
Grafico				
Sequenza segni derivata prima	$+ \quad + \quad +$	$+ \quad + \quad +$	$- \quad - \quad -$	$- \quad - \quad -$
Sequenza segni derivata seconda	$+ \quad \mathbf{0} \quad -$	$- \quad \mathbf{0} \quad +$	$+ \quad \mathbf{0} \quad -$	$- \quad \mathbf{0} \quad +$

NON DERIVABILITA'	**Flesso verticale ascendente**	**Flesso verticale discendente**	**Cuspide concavità verso l'alto**	**Cuspide concavità verso il basso**
Grafico				
Sequenza segni derivata prima	$+$ $\boldsymbol{f'(x_0^-) = +\infty}$ $\boldsymbol{f'(x_0^+) = +\infty}$ $+$	$-$ $\boldsymbol{f'(x_0^-) = -\infty}$ $\boldsymbol{f'(x_0^+) = -\infty}$ $-$	$+$ $\boldsymbol{f'(x_0^-) = +\infty}$ $\boldsymbol{f'(x_0^+) = -\infty}$ $-$	$-$ $\boldsymbol{f'(x_0^-) = -\infty}$ $\boldsymbol{f'(x_0^+) = +\infty}$ $+$
Sequenza segni derivata seconda	$+ \quad \nexists \quad -$	$- \quad \nexists \quad +$	$+ \quad \nexists \quad +$	$- \quad \nexists \quad -$

NON DERIVABILITA’	Angoloso verso l’alto	Angoloso verso l’alto	Angoloso verso il basso	Angoloso verso il basso
Grafico				
Sequenza segni derivata prima	$+$ $f'(x_0{}^-) = +l_1$ $f'(x_0{}^+) = -l_2$ $-$	$+$ $f'(x_0{}^-) = +l_1$ $f'(x_0{}^+) = -l_2$ $-$	$-$ $f'(x_0{}^-) = -l_1$ $f'(x_0{}^+) = +l_2$ $+$	$-$ $f'(x_0{}^-) = -l_1$ $f'(x_0{}^+) = +l_2$ $+$
Sequenza segni derivata seconda	**+ 0 −**	**− 0 +**	**− 0 +**	**+ 0 −**

Osservazione:
per i punti angolosi esistono ulteriori possibilità, ad esempio quando uno dei due limiti del rapporto incrementale è infinito.