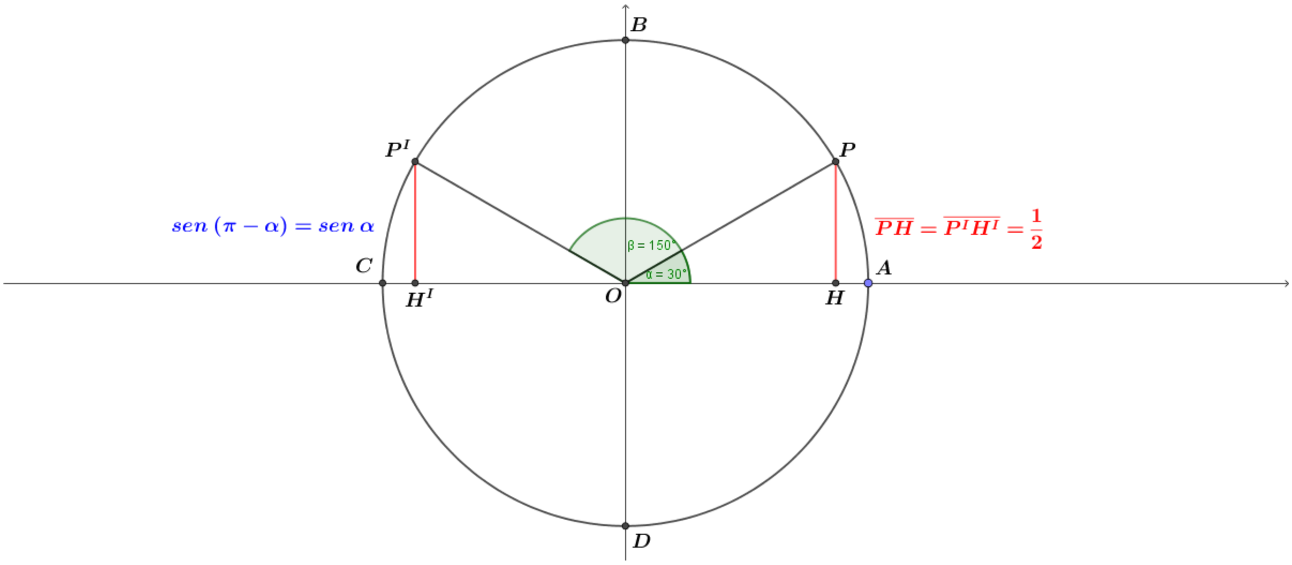
ESERCIZI SVOLTI EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

ESERCIZIO N°1

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Graficamente nel piano goniometrico si ha



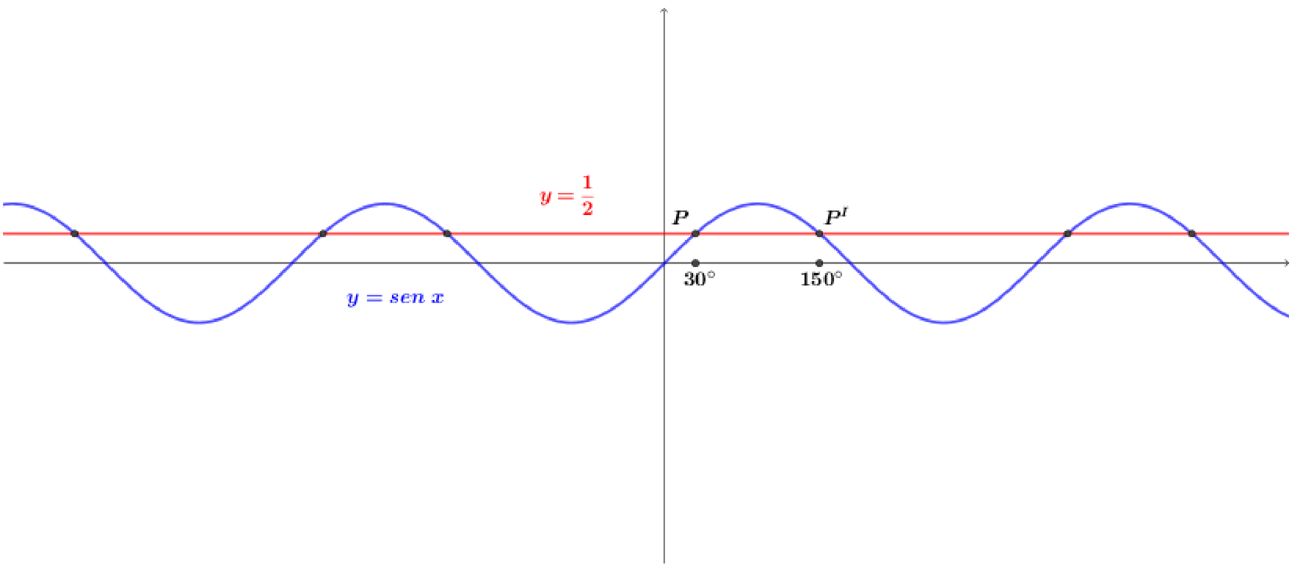
Pertanto, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Inoltre, per la relazione degli archi associati, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Graficamente nel piano cartesiano si ha

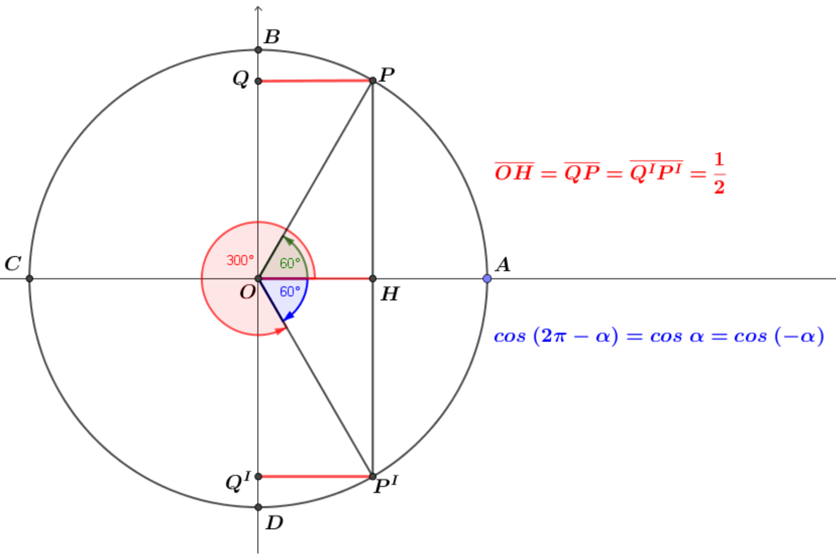


ESERCIZIO N°2

Risolvere l'equazione

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Graficamente nel piano goniometrico si ha



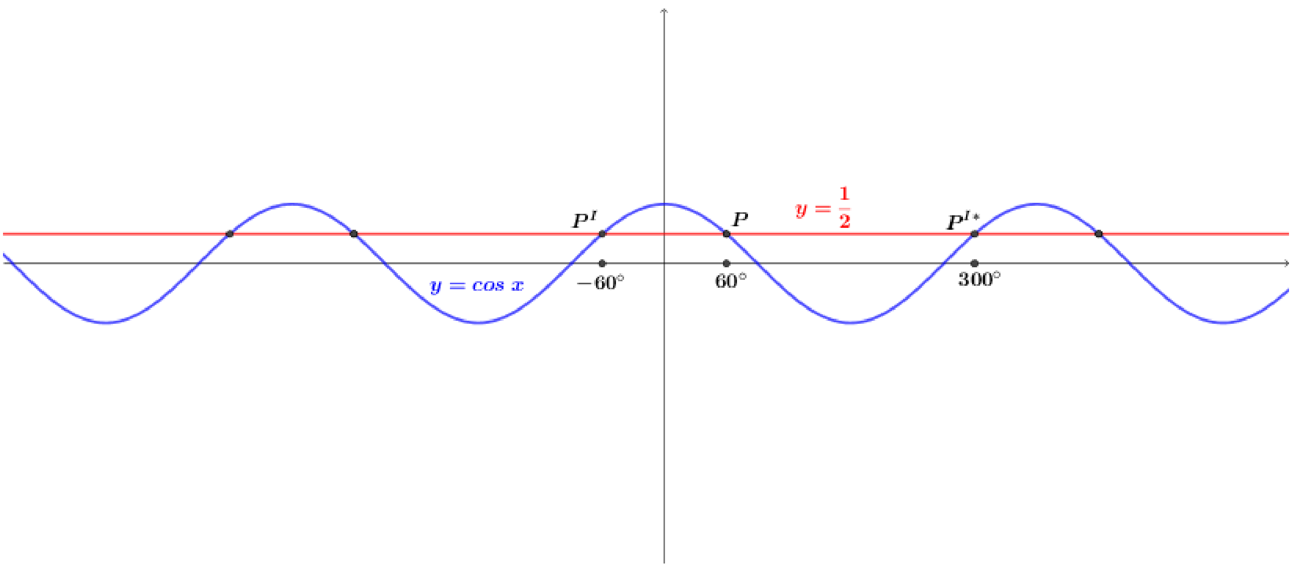
Pertanto, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Inoltre, per la relazione degli archi associati, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (oppure \quad x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi)$$

Graficamente nel piano cartesiano si ha

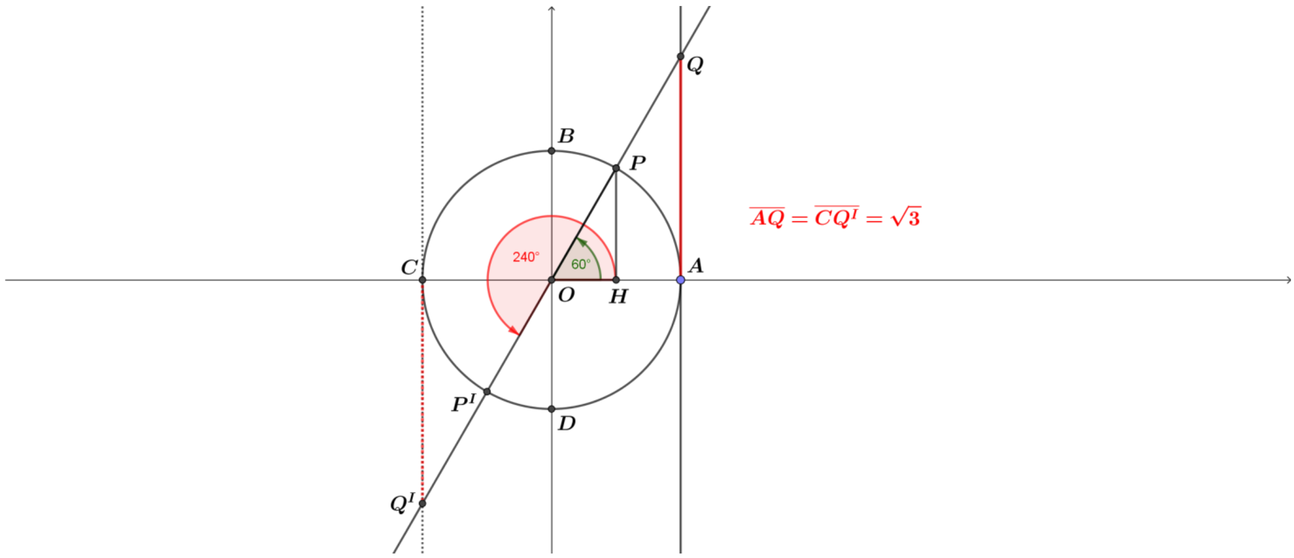


ESERCIZIO N°3

Risolvere l'equazione

$$tg\ x = \sqrt{3}$$

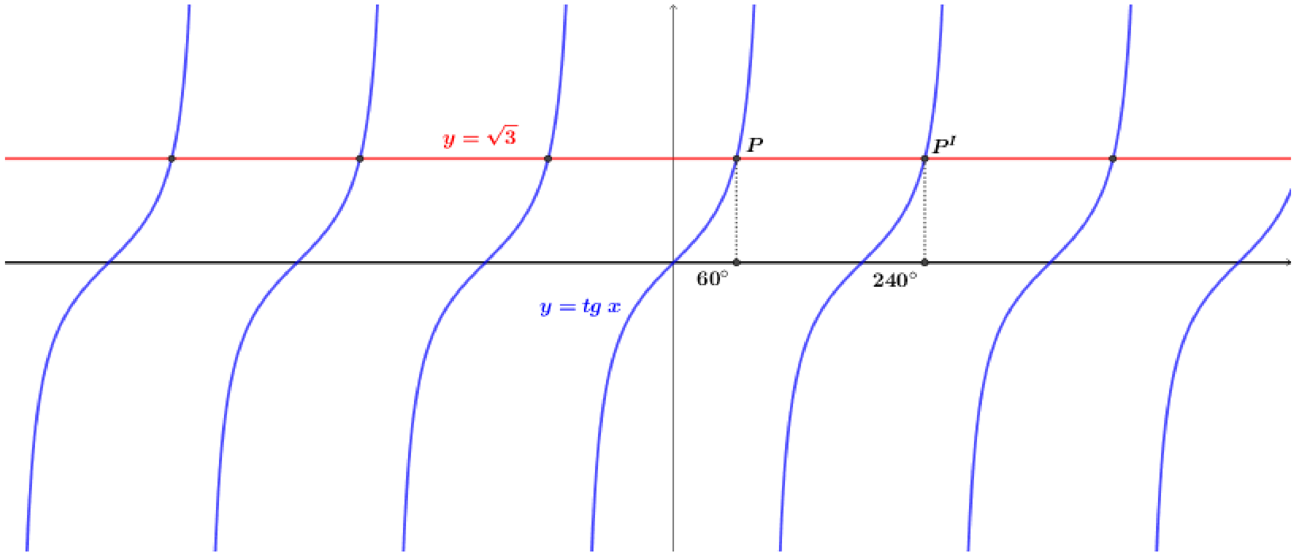
Graficamente nel piano goniometrico si ha



Pertanto, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Graficamente nel piano cartesiano si ha

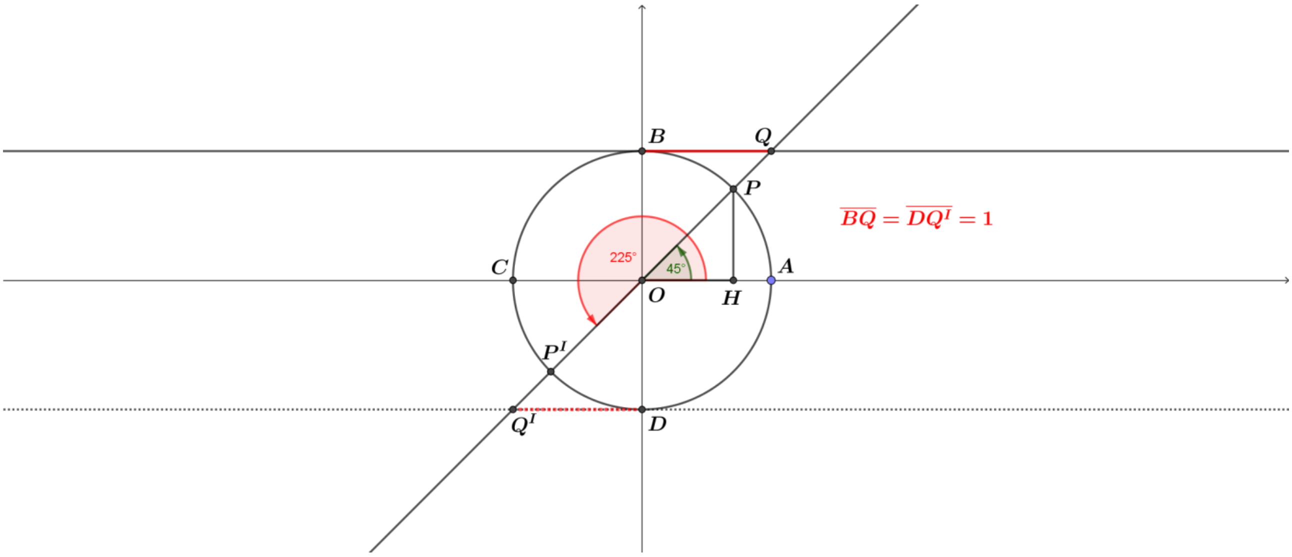


ESERCIZIO N°4

Risolvere l'equazione

$$ctg\, x = 1$$

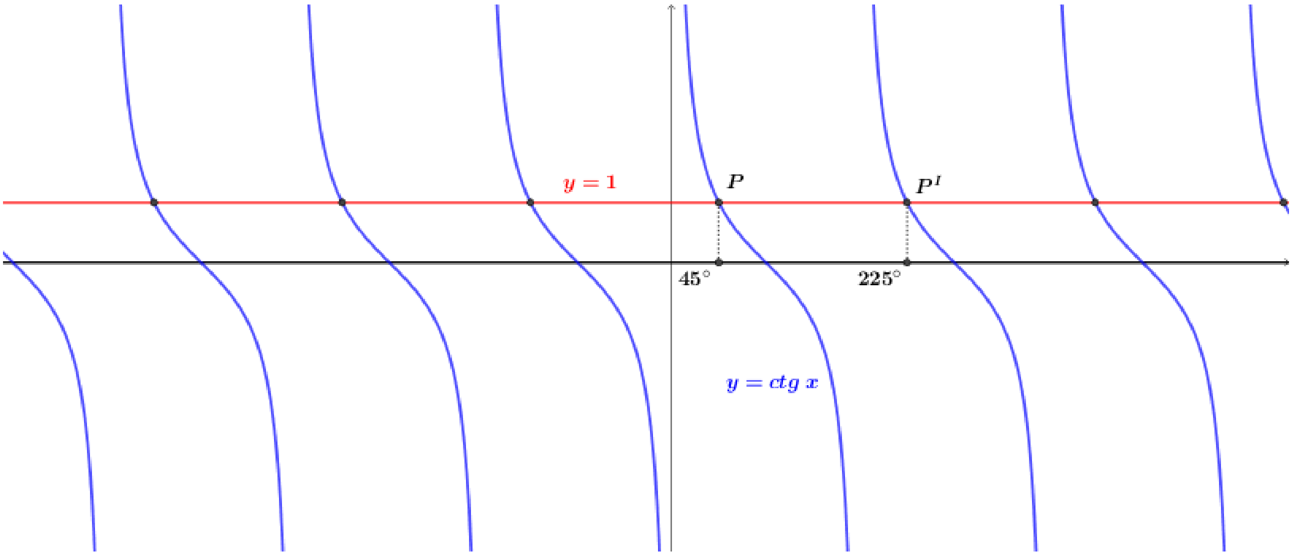
Graficamente nel piano goniometrico si ha



Pertanto, l'equazione ammette la famiglia di soluzioni

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Graficamente nel piano cartesiano si ha



ESERCIZIO N°5

Risolvere l'equazione

$$sen\ 5x = sen\ 2x$$

I seni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando uno è il supplementare dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$5x = 2x + 2k\pi \rightarrow 5x - 2x = 2k\pi \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2}{3}k\pi$$

e

$$5x = \pi - 2x + 2k\pi \rightarrow 5x + 2x = \pi + 2k\pi \rightarrow 7x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi$$

N.B.

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi \quad si\ puo'scrivere \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{7}$$

ESERCIZIO N°6

Risolvere l'equazione

$$sen\ \frac{x}{2} = sen\ 2x$$

I seni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando uno è il supplementare dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$\frac{x}{2} = 2x + 2k\pi \rightarrow \frac{x}{2} - 2x = 2k\pi \rightarrow -\frac{3}{2}x = 2k\pi \rightarrow \frac{3}{2}x = -2k\pi \rightarrow x = -\frac{4}{3}k\pi$$

e

$$\frac{x}{2} = \pi - 2x + 2k\pi \rightarrow \frac{x}{2} + 2x = \pi + 2k\pi \rightarrow \frac{5}{2}x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}k\pi$$

N.B.

$$x = \frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}k\pi \quad si\ puo'scrivere \quad x = (2k+1)\frac{2}{5}\pi$$

In gradi sessagesimali si ottiene

$$x = -k\,240° \quad oppure\ x = k\,240° \quad perche' \quad k\epsilon\mathbb{Z}$$

$$x = (2k+1)72° \quad oppure \quad x = 72° + k\,144°$$

ESERCIZIO N°7

Risolvere l'equazione

$$\cos 5x = \cos 3x$$

I coseni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando un angolo è l'opposto dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$5x = 3x + 2k\pi \rightarrow 5x - 3x = 2k\pi \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi$$

e

$$5x = -3x + 2k\pi \rightarrow 5x + 3x = 2k\pi \rightarrow 8x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{1}{4}k\pi$$

N.B.

In gradi sessagesimali si ottiene

$$x = k\,180°$$

$$x = k\,45°$$

ESERCIZIO N°8

Risolvere l'equazione

$$\cos(2x - 30°) = \cos(x + 45°)$$

I coseni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando un angolo è l'opposto dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$2x - 30° = x + 45° + k\,360° \rightarrow 2x - x = 30° + 45° + k\,360° \rightarrow x = 75° + k\,360°$$

e

$$2x - 30° = -(x + 45°) + k\,360° \rightarrow 2x - 30° = -x - 45° + k\,360°$$

Ossia

$$2x + x = 30° - 45° + k\,360° \rightarrow 3x = -15° + k\,360° \rightarrow x = -\frac{15°}{3} + k\,\frac{360°}{3} \rightarrow$$

Cioè

$$x = -5° + k\,120°$$

N.B.

In radianti si ottiene

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \quad e \quad x = -\frac{1}{36}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

ESERCIZIO N°8

Risolvere l'equazione

$$sen\,(5x - 8°) = cos\,(-3x + 18°)$$

Ricordando che il coseno di un angolo è uguale al seno dell'angolo complementare oppure il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare, ossia

$$cos\,x = sen\,(90° - x)$$

oppure

$$sen\,x = cos\,(90° - x)$$

Quindi essendo vera la seguente relazione

$$cos\,(-3x + 18°) = sen\,[90° - (-3x + 18°)]$$

Cioè

$$cos\,(-3x + 18°) = sen\,(72° + 3x)$$

L'equazione data si può scrivere, ad esempio, nel seguente modo

$$sen\,(5x - 8°) = sen\,(72° + 3x)$$

I seni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando uno è il supplementare dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$5x - 8° = 72° + 3x + k\,360° \rightarrow 5x - 3x = 72° + 8 + k\,360°$$

Ossia

$$2x = 80° + k\,360° \rightarrow x = 40° + k\,180°$$

Inoltre, per quanto riguarda la seconda possibilità si ha

$$5x - 8° = 180° - (72° + 3x) + k\,360° \rightarrow 5x - 8° = 180° - 72° - 3x + k\,360°$$

Ossia

$$5x + 3x = 180° - 72° + 8° + k\,360° \rightarrow 8x = 116° + k\,380° \rightarrow x = 14{,}5° + k\,45°$$

N.B.

$$14{,}5° = 14°\,30'$$

ESERCIZIO N°9

Risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{sen\ (-x+30°) = cos\ (3x+60°)}$$

Ricordando che il coseno di un angolo è uguale al seno dell'angolo complementare oppure il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare, ossia

$$\boldsymbol{cos\ x = sen\ (90° - x) \quad oppure \quad sen\ x = cos\ (90° - x)}$$

Quindi essendo vera la seguente relazione

$$\boldsymbol{cos\ (3x+60°) = sen\ [90° - (3x+60°)]}$$

Cioè

$$\boldsymbol{cos\ (3x+60°) = sen\ (-3x+30°)}$$

L'equazione data si può scrivere, ad esempio, nel seguente modo

$$\boldsymbol{sen\ (-x+30°) = sen\ (-3x+30°)}$$

I seni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando uno è il supplementare dell'altro, pertanto, ha senso scrivere

$$\boldsymbol{-x+30° = -3x+30° + k\,360° \rightarrow 3x - x = 30° - 30° + k\,360°}$$

Ossia

$$\boldsymbol{2x = k\,360° \rightarrow x = k\,180°}$$

Inoltre, per quanto riguarda la seconda possibilità si ha

$$\boldsymbol{-x+30° = 180° - (-3x+30°) + k\,360° \rightarrow -x+30° = 180° + 3x - 30° + k\,360°}$$

Ossia

$$\boldsymbol{-3x - x = 180° - 30° - 30° + k\,360° \rightarrow -4x = 120° + k\,360° \rightarrow x = -30° - k\,90°}$$

Analogamente si ha

$$\boldsymbol{sen\ (-x+30°) = cos\ [90° - (-x+30°)] = cos\ (x+60°)}$$

Quindi l'equazione data si può scrivere

$$\boldsymbol{cos\ (x+60°) = cos\ (3x+60°)}$$

I coseni sono uguali o quando lo sono gli angoli o quando un angolo è l'opposto dell'altro, quindi

$$\boldsymbol{x+60° = 3x+60° + k\,360° \rightarrow -2x = k\,360° \rightarrow x = -k\,180°}$$

Inoltre, per quanto riguarda la seconda possibilità si ha

$$\boldsymbol{x+60° = -3x - 60° + k\,360° \rightarrow 4x = -120° + k\,360° \rightarrow x = -30° + k\,90°}$$

ESERCIZIO N°10

Risolvere l'equazione

$$tg\,(2x-60°)=tg\,(x+40°)$$

Le tangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$2x-60°=x+40°+k\,180°$$

Ossia

$$2x-x=60°+40°+k\,180° \rightarrow x=100°+k\,180°$$

ESERCIZIO N°11

Risolvere l'equazione

$$ctg\,\frac{x}{3}=ctg\,\frac{x}{4}$$

Le cotangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+k\,\pi$$

Ossia

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=k\,\pi \rightarrow \frac{4x-3x}{12}=k\,\pi \rightarrow \frac{x}{12}=k\pi \rightarrow x=12k\,\pi$$

ESERCIZIO N°12

Risolvere l'equazione

$$ctg\,\frac{5}{2}x=0$$

L'equazione data si può scrivere

$$ctg\,\frac{5}{2}x=ctg\,90°$$

Le cotangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$\frac{5}{2}x=90°+k\,180° \rightarrow x=\frac{2}{5}(90°+k\,180°) \rightarrow x=36°+k\,72°$$

ESERCIZIO N°13

Risolvere l'equazione

$$tg\,(9° + 3x) = ctg\,(6x - 18°)$$

La tangente goniometrica di un angolo è uguale alla cotangente dell'angolo complementare, pertanto, ha senso scrivere

$$tg\,(9° + 3x) = ctg\,[90° - (9° + 3x)] = ctg\,(81° - 3x)$$

Quindi l'equazione data diventa

$$ctg\,(81° - 3x) = \ ctg\,(6x - 18°)$$

Le cotangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$81° - 3x = 6x - 18° + k\,180°$$

Ossia

$$-3x - 6x = -81° - 18° + k\,180° \rightarrow -9x = -99° + k\,180° \ \rightarrow x = 11° - k\,20°$$

Analogamente si ha se si considera che la cotangente goniometrica di un angolo è uguale alla tangente dell'angolo complementare, infatti

$$ctg\,(6x - 18°) = tg\,[90° - (6x - 18°)] = tg\,(108° - 6x)$$

Quindi l'equazione data diventa

$$tg\,(9° + 3x) = tg\,(108° - 6x)$$

Le tangenti goniometriche sono uguali quando lo sono gli angoli, pertanto, ha senso scrivere

$$9° + 3x = 108° - 6x + k\,180°$$

Ossia

$$3x + 6x = 108° - 9° + k\,180° \rightarrow 9x = 99° + k\,180° \rightarrow x = 11° + k\,20°$$

Esempio di verifica delle soluzioni

Se $k = 1$ *allora considerata la famiglia delle soluzioni* $x = 11° - k\,20°$ *si ottiene* $x = -9°$

Se $k = 1$ *allora considerata la famiglia delle soluzioni* $x = 11° + k\,20°$ *si ottiene* $x = 31°$

Se $k = -1$ *allora considerata la famiglia delle soluzioni* $x = 11° - k\,20°$ *si ottiene* $x = 31°$

Se $k = -1$ *allora considerata la famiglia delle soluzioni* $x = 11° + k\,20°$ *si ottiene* $x = -9°$

A due a due si ottengono le stesse soluzioni.