[Goniometria](#)

[Equazioni goniometriche](#)

ESERCIZI SVOLTI EQUAZIONI GONIOMETRICHE LINEARI IN SENO E COSENO

ESERCIZIO N°1

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 0$$

Osservando che

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

si può dividere ciascun termine dell'equazione per $\cos x \neq 0$

Pertanto si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} = 0$$

Cioè

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow x = 120° + k180°$$

ESERCIZIO N°2

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$$

Osservando che

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

si può dividere ciascun termine dell'equazione per $\cos x \neq 0$

Pertanto si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

Cioè

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x = 45° + k180°$$

ESERCIZIO N°3

Risolvere l'equazione

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 1$$

Si trasforma l'equazione data mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t = tg\ \frac{x}{2}\ \ con\ \ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = 1$$

Moltiplicando ambo i membri per $1 + t^2$ si ottiene

$$1 - t^2 - 2\mathrm{t} = 1 + t^2$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$2t^2 + 2\mathrm{t} = 0 \rightarrow 2\mathrm{t}(\mathrm{t}+1) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & t = 0 \\ \searrow & t = -1 \end{matrix}$$

Per $t = 0$ si ha

$$tg\ \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = 0 + k\pi \rightarrow x = 2k\pi$$

Per $t = -1$ si ha

$$tg\ \frac{x}{2} = -1 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3}{4}\pi + k\pi \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

ESERCIZIO N°4

Risolvere l'equazione

$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

Si trasforma l'equazione data mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t = tg\ \frac{x}{2}\ \ con\ \ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\sqrt{3} \times \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - 2 = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per $1 + t^2$ si ottiene

$$(1 - t^2)\sqrt{3} + 2\mathrm{t} - (1 + t^2)2 = 0$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2+2\mathrm{t}-2-2t^2=0 \rightarrow 2t^2+\sqrt{3}t^2-2t+2-\sqrt{3}=0$$

Cioè si è trovato un'equazione algebrica di secondo grado completa nella variabile t

$$(2+\sqrt{3})t^2-2t+2-\sqrt{3}=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=1-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1-(4-3)=1-1=0$$

Pertanto, l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti

$$t=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3} \quad con\ molteplicita'\ 2$$

Per $t=2-\sqrt{3}$ si ha

$$tg\,\frac{x}{2}=2-\sqrt{3} \rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{12}+k\pi \rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

ESERCIZIO N°5

Risolvere l'equazione

$$\left(1-\sqrt{2}\right)\cos x+\operatorname{sen} x+1-\sqrt{2}=0$$

Si trasforma l'equazione data mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\,x=\frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dove\ t=tg\,\frac{x}{2} \quad con \quad \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \rightarrow x\neq\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(1-\sqrt{2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}+1-\sqrt{2}=0$$

Moltiplicando ambo i membri per $1+t^2$ si ottiene

$$(1-t^2)\left(1-\sqrt{2}\right)+2\mathrm{t}+(1+t^2)\left(1-\sqrt{2}\right)=0$$

Mettendo in evidenza il fattore $1-\sqrt{2}$ si ottiene

$$(1-t^2+1-t^2)\left(1-\sqrt{2}\right)+2\mathrm{t}=0 \rightarrow 2\mathrm{t}+2\left(1-\sqrt{2}\right)=0 \rightarrow \mathrm{t}+1-\sqrt{2}=0 \ \rightarrow \mathrm{t}=\sqrt{2}-1$$

Ossia

$$tg\,\frac{x}{2}=\sqrt{2}\ -1 \rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{8}+k\pi \rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

Si osserva che l'equazione goniometrica data si annulla anche per $x=\pi+2k\pi$

ESERCIZIO N°6

Risolvere l'equazione

$$\cos\frac{1}{3}x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}x = -1$$

Si pone l'angolo uguale ad una incognita ausiliare, ossia

$$\frac{1}{3}x = y$$

Pertanto, l'equazione data diventa

$$\cos \mathrm{y} - \operatorname{sen}\mathrm{y} = -1$$

Si trasforma l'equazione suddetta mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ y = \frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2}\quad dove\ t = tg\ \frac{y}{2}\quad con\quad \frac{y}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow y \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = -1$$

Moltiplicando ambo i membri per $1 + t^2$ si ottiene

$$1 - t^2 - 2\mathrm{t} = -1 - t^2$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$2\mathrm{t} = 2 \rightarrow \mathrm{t} = 1$$

Ossia

$$tg\ \frac{y}{2} = 1 \rightarrow \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow \frac{1}{3}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 6k\pi$$

Si osserva inoltre che l'equazione

$$\cos \mathrm{y} - \operatorname{sen}\mathrm{y} = -1$$

si annulla anche per $y = \pi + 2k\pi$

infatti

$$\cos(\pi + 2k\pi) - \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) = -1$$

$$-1 = -1\ \text{identita}'$$

Pertanto, l'equazione data ammette anche le soluzioni del tipo

$$\frac{1}{3}x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = 3\pi + 6k\pi$$

ESERCIZIO N°7

Risolvere l'equazione

$$-\cos\frac{2}{5}x+\mathrm{sen}\frac{2}{5}x=1$$

Si pone l'angolo uguale ad una incognita ausiliare, ossia

$$\frac{2}{5}x=y$$

Pertanto, l'equazione data diventa

$$-\cos \mathrm{y}+\mathrm{seny}=1$$

Si trasforma l'equazione suddetta mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\, y=\frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\, y=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t=tg\,\frac{y}{2}\ \ con\ \ \frac{y}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\rightarrow y\neq\pi+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$-\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}=1$$

Moltiplicando ambo i membri per $1+t^2$ si ottiene

$$-1+t^2+2\mathrm{t}=1+t^2$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$2\mathrm{t}=2\rightarrow \mathrm{t}=1$$

Ossia

$$tg\,\frac{y}{2}=1\rightarrow\frac{y}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\rightarrow y=\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow\frac{2}{5}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow x=\frac{5}{4}\pi+5k\pi$$

Si osserva inoltre che l'equazione

$$-\cos \mathrm{y}+\mathrm{seny}=1$$

si annulla anche per $y=\pi+2k\pi$

infatti

$$-\cos\,(\pi+2k\pi)+\mathrm{sen}(\pi+2k\pi)=1$$

$$1=1\ \mathrm{identita'}$$

Pertanto, l'equazione data ammette anche le soluzioni del tipo

$$\frac{2}{5}x=\pi+2k\pi\rightarrow x=\frac{5}{2}\pi+5k\pi$$

ESERCIZIO N°8

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$$

Si pone l'angolo uguale ad una incognita ausiliare, ossia

$$2x-\frac{\pi}{3}=y$$

Pertanto, l'equazione data diventa

$$\operatorname{sen} y+\sqrt{3}\cos y-\sqrt{3}=0$$

Si trasforma l'equazione suddetta mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ y=\frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t=tg\ \frac{y}{2}\ \ con\ \ \frac{y}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\rightarrow y\neq\pi+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$$

Moltiplicando ambo i membri per $1+t^2$ si ottiene

$$2t+(1-t^2)\sqrt{3}-(1+t^2)\sqrt{3}=0$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$2t-2\sqrt{3}t^2=0\rightarrow 2\sqrt{3}t^2-2t=0\rightarrow 2t\left(\sqrt{3}\,t-1\right)=0\ \begin{matrix}\nearrow\\ \searrow\end{matrix}\ \begin{matrix}2t=0\ \rightarrow t=0\\ t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{matrix}$$

Per $t=0$ **si ha**

$$tg\ \frac{y}{2}=0\rightarrow\frac{y}{2}=0+k\pi\rightarrow y=2k\pi\rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Inoltre

per $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$tg\ \frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\rightarrow\frac{y}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi\rightarrow y=\frac{\pi}{3}+2k\pi\rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\rightarrow 2x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$$

Cioè semplificando per 2 si ottiene

$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

ESERCIZIO N°9

Risolvere l'equazione

$$\left(\sqrt{3}+2\right)\text{sen } x+\cos x+1=0$$

Si trasforma l'equazione data mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ x=\frac{2t}{1+t^2}\ ;cos\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t=tg\ \frac{x}{2}\ \ con\ \ \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\rightarrow x\neq\pi+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\left(\sqrt{3}+2\right)\times\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$$

Moltiplicando ambo i membri per $1+t^2$ si ottiene

$$2\left(\sqrt{3}+2\right)\text{t}+1-t^2+1+t^2=0\rightarrow 2\left(\sqrt{3}+2\right)\text{t}+2=0\rightarrow\left(\sqrt{3}+2\right)\text{t}+1=0$$

Cioè

$$\text{t}=-\frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

Razionalizzando si ha

$$\text{t}=-\frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=-\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}=-\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Per $t=-\left(2-\sqrt{3}\right)$ si ha

$$tg\ \frac{x}{2}=-\left(2-\sqrt{3}\right)\rightarrow\frac{x}{2}=\frac{11}{12}\pi+k\pi\rightarrow x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi$$

Si osserva che l'equazione goniometrica data si annulla anche per $x=\pi+2k\pi$

Infatti si ha

$$\left(\sqrt{3}+2\right)\text{sen }(\pi+2k\pi)+\cos\left(\pi+2k\pi\right)+1=0$$

Cioè

$$-1+1=0$$

ESERCIZIO N°10

Risolvere l'equazione

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen }x - \cos x - 1 = 0$$

Si trasforma l'equazione data mediante le formule parametriche, cioè

$$sen\ x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ dove\ t = tg\ \frac{x}{2}\ \ con\ \ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto, sostituendo si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per $1 + t^2$ si ottiene

$$\sqrt{2}\text{t} - 1 + t^2 - 1 - t^2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}\text{t} - 2 = 0 \rightarrow \text{t} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Per $t = \sqrt{2}$ si ha

$$tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{x}{2} = arctg\sqrt{2} \rightarrow \frac{x}{2} \cong 54,7356° + k\ 180°$$

Cioè

$$x \cong 109,4712° + k\ 360°$$

Poiché

$$0,4712 \times 60' = 28,272' \ \text{ e } \ 0,272 \times 60'' = 16,32''$$

Si può anche scrivere

$$x \cong 109°\ 28'\ 16'' + k\ 360°$$

Si osserva che l'equazione goniometrica data si annulla anche per $x = 180° + k\ 360°$

Infatti si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen }(180° + k\ 360°) - \cos\ (180° + k\ 360°) - 1 = 0$$

Cioè

$$-(-1) - 1 = 0$$