Home page

Goniometria

Equazioni goniometriche

ESERCIZI SVOLTI EQUAZIONI GONIOMETRICHE METODO GRAFICO

ESERCIZIO N°1

Risolvere l'equazione

$$\cos x + senx = 1$$

Ponendo

$$\cos x = X \quad e \quad sen\, x = Y$$

l'equazione data diventa

$$X + Y = 1$$

e ricordando la prima relazione fondamenta della goniometria

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1$$

la relazione suddetta si può scrivere nel seguente modo

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Pertanto, mettendo a sistema la due equazioni trovate si ottiene

$$\begin{cases} X + Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ (1 - Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 - Y \\ 1 - 2Y + Y^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y(Y - 1) = 0 \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \rightarrow P(1; 0)$$

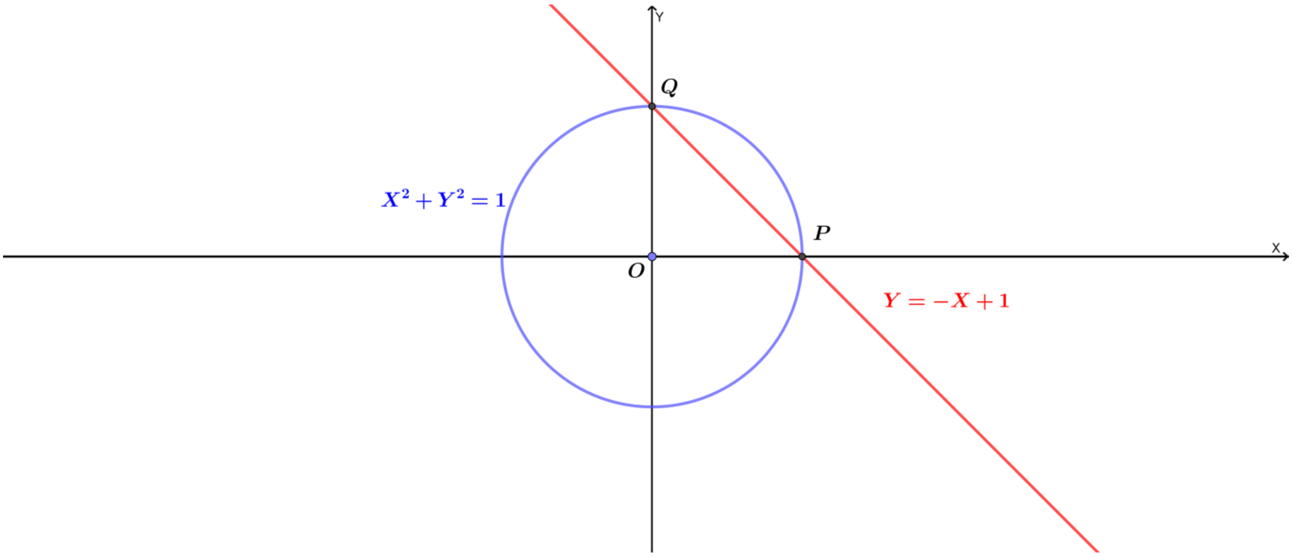
e

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ Y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \rightarrow Q(0; 1)$$

I punti P e Q sono i break point, ossia i punti d'intersezione tra la retta di equazione

$X + Y = 1$ **e la circonferenza** $X^2 + Y^2 = 1$ **,**

Graficamente si ha



Quindi gli angoli che si determinano dalle soluzioni del sistema sono

$$x=\frac{x}{2}+k\,\pi \;\; e \;\; x=2k\,\pi$$

ESERCIZIO N°2

Risolvere l'equazione

$$\text{sen}\,x-\cos x=0$$

Ponendo

$$cos\,x=X \quad e \quad sen\,x=Y$$

l'equazione data diventa

$$Y-X=0$$

e ricordando la prima relazione fondamenta della goniometria

$$cos^2\,x+sen^2\,x=1$$

la relazione suddetta si può scrivere nel seguente modo

$$X^2+Y^2=1$$

Pertanto, mettendo a sistema la due equazioni trovate si ottiene

$$\begin{cases} X-Y=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} X = Y \\ Y^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = Y \\ 2Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = Y \\ Y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} X = Y \\ Y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

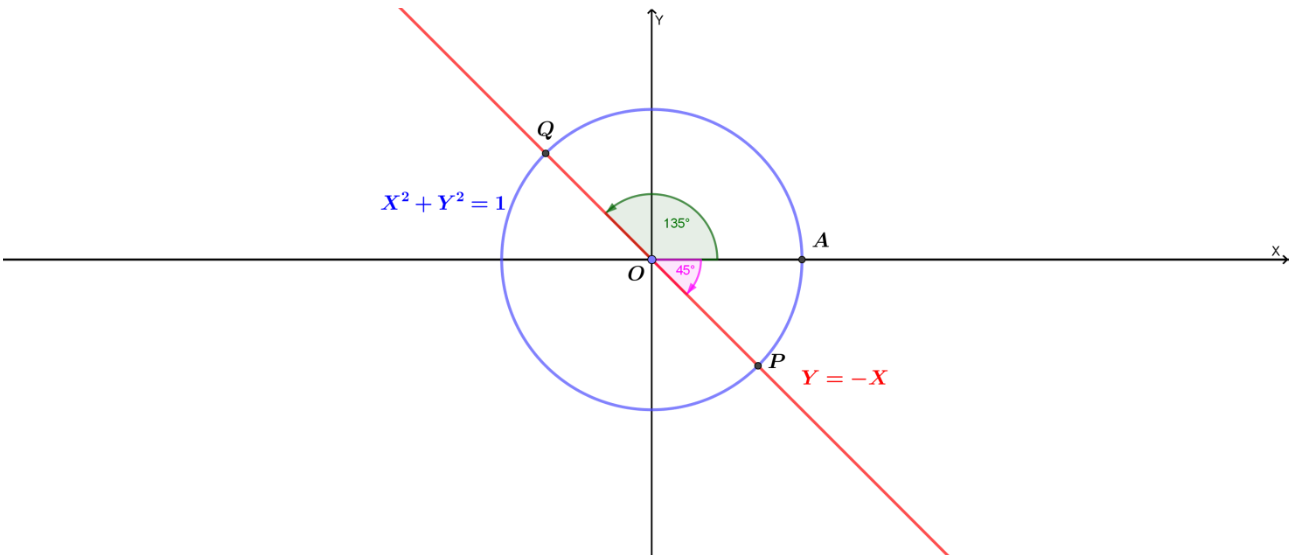
e

$$\begin{cases} X = Y \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

I punti P e Q sono i break point, ossia i punti d'intersezione tra la retta di equazione

$X - Y = 0$ **e la circonferenza** $X^2 + Y^2 = 1$ **,**

Graficamente si ha



Cioè

$$x = 45° + k\,180°$$

Ossia in radianti

$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi$$

ESERCIZIO N°3

Risolvere l'equazione

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 1$$

Ponendo

$$\cos x = X \quad e \quad \operatorname{sen} x = Y$$

l'equazione data diventa $X - Y = 1$

e ricordando la prima relazione fondamenta della goniometria

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

la relazione suddetta si può scrivere nel seguente modo $X^2 + Y^2 = 1$

Pertanto, mettendo a sistema la due equazioni trovate si ottiene

$$\begin{cases} X - Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

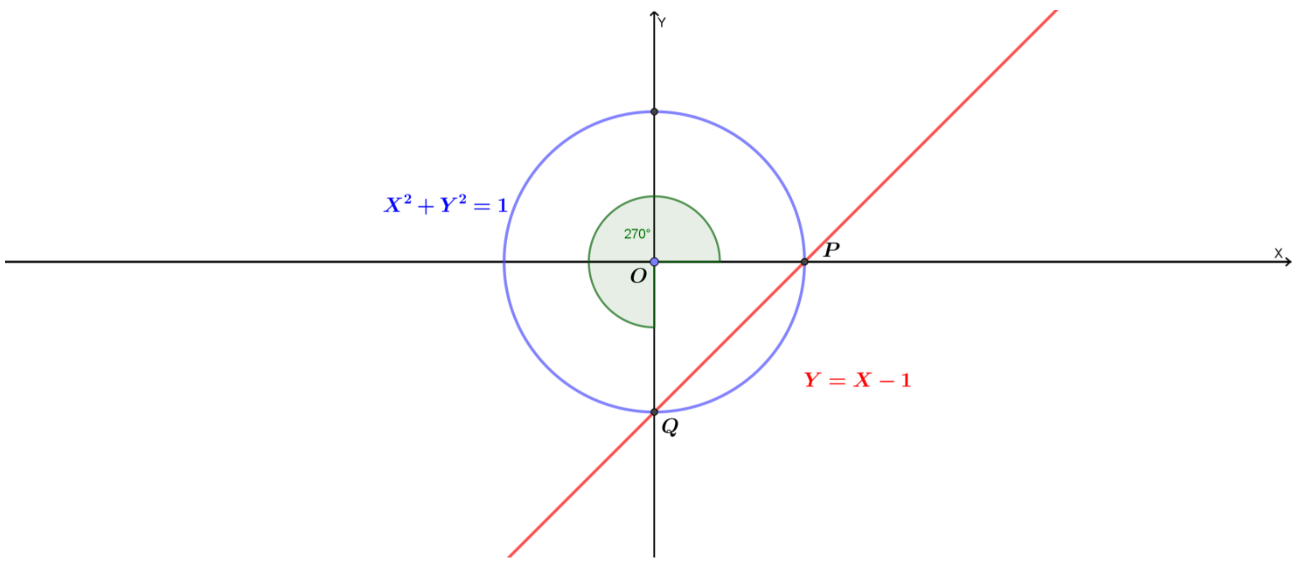
$$\begin{cases} X = 1 + Y \\ (1+Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 + Y \\ 1 + 2Y + Y^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 + Y \\ 2Y^2 + 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 + Y \\ 2Y(Y+1) = 0 \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} X = 1 + Y \\ 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \rightarrow P(1;0) \quad \text{e} \quad \begin{cases} X = 1 + Y \\ Y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases} \rightarrow Q(0;-1)$$

I punti P e Q sono i break point, ossia i punti d'intersezione tra la retta di equazione

$X - Y = 1$ **e la circonferenza** $X^2 + Y^2 = 1$ **, graficamente si ha**



Le soluzioni del sistema sono $x = \frac{3x}{2} + k\pi \;\; e \;\; x = 2k\pi$

ESERCIZIO N°4

Risolvere l'equazione

$$\cos\frac{1}{3}x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\,x = -1$$

Si pone l'angolo uguale ad una incognita ausiliare, ossia

$$\frac{1}{3}x = t$$

Pertanto, l'equazione data diventa $cos\,t - sen\,t = -1$

Ponendo $cos\,t = X \quad e \quad sen\,t = Y$ **l'equazione data diventa** $X - Y = -1$

e ricordando la prima relazione fondamenta della goniometria $cos^2 t + sen^2 t = 1$

la relazione suddetta si può scrivere nel seguente modo $X^2 + Y^2 = 1$

Pertanto, mettendo a sistema la due equazioni trovate si ottiene $\begin{cases} X - Y = -1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

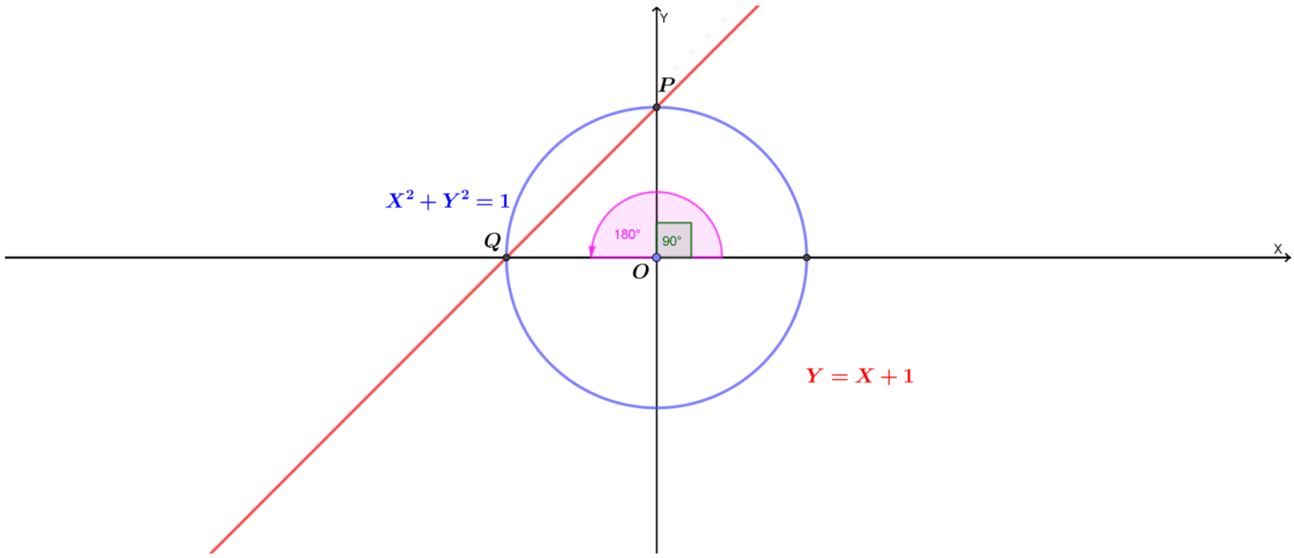
$$\begin{cases} X = -1 + Y \\ (-1+Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = -1 + Y \\ 1 - 2Y + Y^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = -1 + Y \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = -1 + Y \\ 2Y(Y-1) = 0 \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} X = -1 + Y \\ 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \end{cases} \rightarrow P(-1;0) \quad e \quad \begin{cases} X = -1 + Y \\ Y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = +1 \end{cases} \rightarrow Q(0;1)$$

I punti P e Q sono i break point, ossia i punti d'intersezione tra la retta di equazione

$X - Y = -1$ **e la circonferenza** $X^2 + Y^2 = 1$ **, graficamente si ha**



$$\frac{1}{3}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 6k\pi \quad e \quad \frac{1}{3}x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = 3\pi + 6k\,\pi$$

ESERCIZIO N°5

Risolvere l'equazione

$$-\cos\frac{2}{5}x+\operatorname{sen}\frac{2}{5}\,x=1$$

Si pone l'angolo uguale ad una incognita ausiliare, ossia

$$\frac{2}{5}x=t$$

Pertanto, l'equazione data diventa $-\cos t+\operatorname{sen} t=1\rightarrow \cos x-\operatorname{sen} x=\ -1$

Ponendo $\cos t=X\quad e\quad \operatorname{sen} t=Y$ l'equazione data diventa $X-Y=-1$

e ricordando la prima relazione fondamenta della goniometria $\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$

la relazione suddetta si può scrivere nel seguente modo $X^2+Y^2=1$

Pertanto, mettendo a sistema la due equazioni trovate si ottiene $\begin{cases} X-Y=-1\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

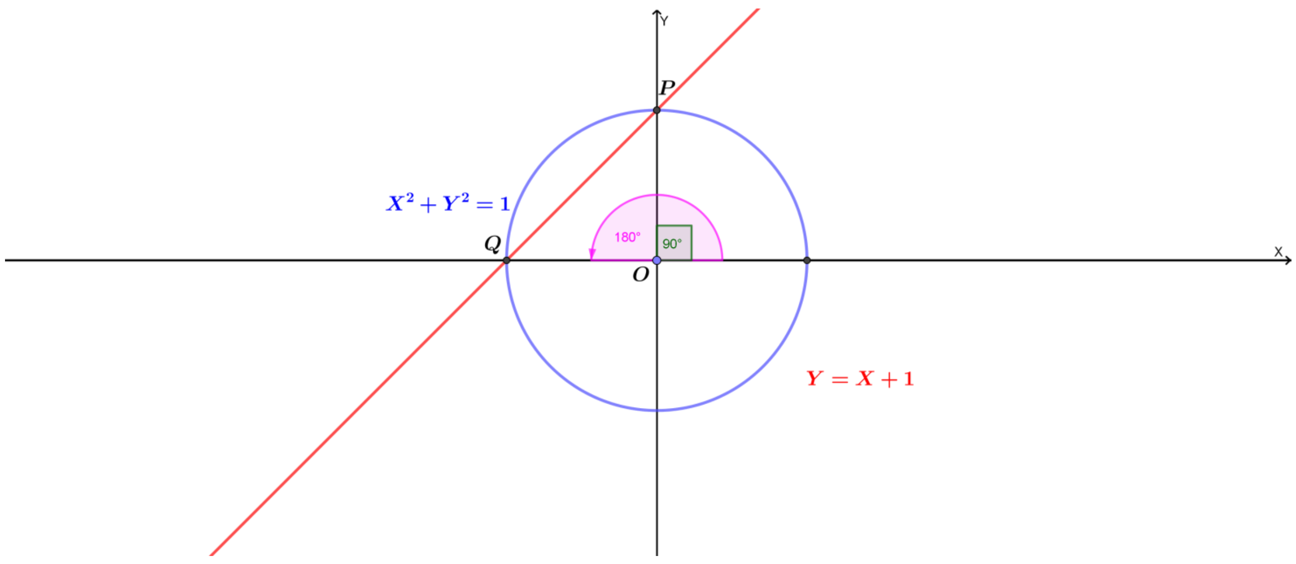
$$\begin{cases} X=-1+Y\\ (-1+Y)^2+Y^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases} X=-1+Y\\ 1-2Y+Y^2+Y^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases} X=-1+Y\\ 2Y^2-2Y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} X=-1+Y\\ 2Y(Y-1)=0\end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} X=-1+Y\\ 2Y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} X=-1\\ Y=0\end{cases}\rightarrow P(-1;0)\quad e\quad \begin{cases} X=-1+Y\\ Y-1=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} X=0\\ Y=+1\end{cases}\rightarrow Q(0;1)$$

I punti P e Q sono i break point, ossia i punti d'intersezione tra la retta di equazione

$X-Y=-1$ e la circonferenza $X^2+Y^2=1$, graficamente si ha



$$\frac{2}{5}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\rightarrow x=\frac{5}{4}\pi+5k\pi\quad e\quad \frac{2}{5}x=\pi+2k\pi\rightarrow x=\frac{5}{2}\pi+5k\pi$$