ESERCIZI SVOLTI EQUAZIONI GONIOMETRICHE RICONDUCIBILI A OMOGENEE

ESERCIZIO N°1

Risolvere l'equazione

$$\left(\sqrt{3}+3\right)\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x+2\cos^2 x-3=0$$

L'equazione data è riconducibile ad un'equazione *omogenea* di secondo grado se si moltiplica il termine noto per la prima relazione fondamentale della goniometria, infatti essendo

$$\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$$

e moltiplicando ambo i membri per -3 si ha

$$-3(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)=-3$$

e andando a sostituire nell'equazione data si ottiene

$$\left(\sqrt{3}+3\right)\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x+2\cos^2 x-3\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right)=0$$

Ossia

$$\left(\sqrt{3}+3\right)\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x+2\cos^2 x-3\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x=0$$

Riducendo i termini simili si ha

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x=0$$

Si osserva che l'equazione data si è trasformata in un'equazione omogenea di secondo grado nella forma completa.

Dividendo tutti i termini dell'equazione per $cos^2x\neq 0$ quindi ponendo

$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

si ha

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

Cioè

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{tg} x-1=0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $tg\ x$

Pertanto

$$\Delta = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-1) = 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 3 + 1 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 > 0$$

Quindi l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte, infatti

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right) \pm \left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}} \begin{array}{l} \nearrow \quad \dfrac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \\ \searrow \quad \dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$Per\ \ \operatorname{tg} x = -1\ \ si\ ha\ \ x = 135° + k\, 180°$

$Per\ \ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \ si\ ha\ \ x = 30° + k\, 180°$

Inoltre, si deve verificare cosa accade se nell'equazione data si sostituisce il valore

$$x = \frac{\pi}{2}$$

ossia se l'equazione data ammette un'ulteriore soluzione.

Pertanto, si ha

$$\left(\sqrt{3}+3\right) \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} + \left(\sqrt{3}-1\right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 3 = 0$$

Essendo

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \quad e \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

si ottiene

$$\sqrt{3} + 3 \neq 3 \rightarrow \sqrt{3} \neq 0$$

Quindi l'equazione data non si annulla, allora il valore

$$x = \frac{\pi}{2}$$

non è soluzione dell'equazione.

ESERCIZIO N°2

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 1$$

L'equazione data è riconducibile ad un'equazione *omogenea* di secondo grado se si utilizza la prima relazione fondamentale della goniometria, infatti essendo

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

e andando a sostituire nell'equazione data si ottiene

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$$

Ordinando e semplificando i termini si ha

$$4\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Si osserva che l'equazione data si è trasformata in un'equazione omogenea di secondo grado nella forma incompleta.

Dividendo tutti i termini dell'equazione per $cos^2 x \neq 0$ quindi ponendo

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

si ha

$$\frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = 0$$

Cioè

$$4 - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 4$$

che è un'equazione goniometrica elementare.

Pertanto, si ha

$$x = arctg\, 4 = 75,9637° + k\,180°$$

Inoltre, si deve verificare cosa accade se nell'equazione data si sostituisce il valore

$$x = \frac{\pi}{2}$$

ossia se l'equazione data ammette un'ulteriore soluzione.

Pertanto, si ha

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 3\cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

Essendo

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1 \quad e \quad \cos\frac{\pi}{2}=0$$

si ottiene

$$1=1 \;\; identita'$$

Quindi l'equazione data ammette anche la seguente famiglia di soluzioni

$$x=\frac{\pi}{2}+k\,\pi$$

ossia

$$x=90°+k\,180°$$

Osservazioni

L'equazione $4\cos^2 x - \operatorname{sen} x\cos x=0$ si può risolvere anche mettendo in evidenza il fattore $cos\ x$, infatti si ottiene

$$\cos x\,(4\cos x-\operatorname{sen} x)=0$$

Per *la legge di annullamento del prodotto,* $a\times b=0 \leftrightarrow a=0 \ \vee \ b=0$, si può scrivere

1 fattore

$$\cos x=0 \rightarrow x=90°+k\,180°$$

2 fattore

$$4\cos x-\operatorname{sen} x=0$$

Dividendo per $cos\ x\neq 0$ si ha

$$4-\operatorname{tg} x=0 \rightarrow \operatorname{tg} x=4$$

Cioè

$$x=arctg\ 4=75,9637°+k\,180°$$

ESERCIZIO N°3

Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x - 1 = 0$$

L'equazione data è riconducibile ad un'equazione *omogenea* di secondo grado se si moltiplica il termine noto per la prima relazione fondamentale della goniometria, infatti essendo

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

e moltiplicando ambo i membri per -1 si ha

$$-(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = -1$$

e andando a sostituire nell'equazione data si ottiene

$$\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x - (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

Ossia

$$\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$$

Riducendo i termini simili si ottiene

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Si osserva che l'equazione data si è trasformata in un'equazione omogenea di secondo grado nella forma completa.

Dividendo tutti i termini dell'equazione per $cos^2 x \neq 0$ quindi ponendo

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

si ha

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

Cioè

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{\sqrt{3}} \rightarrow tg\, x = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Quindi si ottiene

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

che è un'equazione goniometrica elementare, pertanto $x = 60° + k\,180°$

Inoltre, si deve verificare cosa accade se nell'equazione data si sostituisce il valore

$$x = 90°$$

ossia se l'equazione data ammette un'ulteriore soluzione. Pertanto, si ha

$$\mathrm{sen}^2 90° + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,90° \cos 90° - 2\cos^2 90° - 1 = 0$$

Essendo

$$\mathrm{sen}\,90° = 1 \quad e \quad \cos 90° = 0$$

si ottiene $1 - 1 = 0$

Quindi l'equazione data si annulla per il valore $x = 90°$, ossia ammette la famiglia di soluzioni

$$x = 90° + \mathrm{k}\,180°$$

ESERCIZIO N°4

Risolvere l'equazione

$$\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x \cos x = 1$$

L'equazione data è riconducibile ad un'equazione *omogenea* di secondo grado se si utilizza la prima relazione fondamentale della goniometria, infatti essendo

$$\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1$$

e andando a sostituire nell'equazione data si ottiene

$$\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x \cos x = \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x$$

Ordinando e semplificando i termini si ha

$$\cos^2 x - \mathrm{sen}\,x \cos x = 0$$

Si osserva che l'equazione data si è trasformata in un'equazione omogenea di secondo grado nella forma incompleta. Si può risolvere mettendo in evidenza il fattore $cos\ x$, cioè

$$\cos x\,(\cos x - \mathrm{sen}\,x) = 0$$

Per *la legge di annullamento del prodotto,* $a \times b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, si può scrivere

1 fattore

$$\cos x = 0 \rightarrow x = 90° + k\,180°$$

2 fattore

$$\cos x - \mathrm{sen}\,x = 0 \rightarrow \cos x = \mathrm{sen}\,x$$

Per la regola degli angoli associati $sen\ x = cos\ (90 - x)$ sostituendo si ottiene

$$cos\ x = cos\ (90 - x) \rightarrow x = 90 - x + k\,180° \rightarrow 2x = 90° + \mathrm{k}180° \rightarrow x = 45° + \mathrm{k}\,90°$$