Goniometria

Equazioni goniometriche

# EQUAZIONI GONIOMETRICHE RISOLTE UTILIZZANDO LE FORMULE DI DUPLICAZIONE

## ESERCIZIO N°1

*Risolvere l'equazione*

$$\cos 2x + sen^2\, x = 1$$

*Ricordando la regola di duplicazione per il coseno, cioè*

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2\, x$$

*l'equazione data si può scrivere*

$$\cos^2 x - sen^2\, x + sen^2\, x = 1$$

*Semplificando i termini opposti si ha*

$$\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

*Ossia si ottengono due equazioni goniometriche elementari*

$$\cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2k\,\pi$$

*e*

$$\cos x = 1 \rightarrow x = 0 + 2k\,\pi \rightarrow x = 2k\,\pi$$

*Si osserva che l'insieme delle soluzioni si può anche scrivere* $x = k\,\pi$

## ESERCIZIO N°2

*Risolvere l'equazione*

$$sen\, 2x - \cos x = 0$$

*Ricordando la regola di duplicazione per il seno, cioè*

$$sen\, 2x = 2\, sen\, x \cos x$$

*l'equazione data si può scrivere*

$$2\, sen\, x \cos x - \cos x = 0$$

*Mettendo in evidenza il fattore* $\cos x$ *si ha*

$$\cos x\,(2\,\mathrm{sen}\,x - 1) = 0$$

*Per la legge di annullamento del prodotto,* $a \times b = 0 \leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$ *, si può scrivere*

*1 fattore*

$$\cos x = 0 \to x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

*2 fattore*

$$2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \to 2\mathrm{sen}\,x = 1 \to \mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi$$

*e*

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \to x = \frac{5}{6}\pi + 2k\,\pi$$

**ESERCIZIO N°3**

*Risolvere l'equazione*

$$\mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,x = 0$$

*Ricordando la regola di duplicazione per il seno, cioè*

$$\mathrm{sen}\,2x = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$

*l'equazione data si può scrivere*

$$2\,\mathrm{sen}\,x\cos x + \mathrm{sen}\,x = 0$$

*Mettendo in evidenza il fattore* $\mathrm{sen}\,x$ *si ha*

$$\mathrm{sen}\,x\,(2\cos x - 1) = 0$$

*Per la legge di annullamento del prodotto,* $a \times b = 0 \leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$ *, si può scrivere*

*1 fattore*

$$\mathrm{sen}\,x = 0 \to x = 0 + k\,\pi \to x = k\,\pi$$

*2 fattore*

$$2\cos x - 1 = 0 \to 2\cos x = 1 \to \cos x = \frac{1}{2} \to$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \quad e \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\,\pi$$

## ESERCIZIO N°4

*Risolvere l'equazione*

$$\cos 2x + sen\, x = 0$$

*Ricordando la regola di duplicazione per il coseno, cioè*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \; sen^2\, x = 1 - 2\, sen^2\, x$$

*l'equazione data si può scrivere*

$$1 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 0$$

*cioè*

$$2\, sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0$$

*Ponendo*

$$sen\, x = t$$

*L'equazione data è stata trasformata tramite l'incognita ausiliare **t** in un'equazione algebrica completa di secondo grado:*

$$2\, t^2\, x - t\, x - 1 = 0$$

*Pertanto, si calcola il discriminante , cioè*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

*Quindi esistono due soluzioni reali e distinte nell'incognita ausiliare e ricordando che*

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Si trovano le soluzioni in t*

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{array}{l} \nearrow \;\; \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \searrow \;\; \frac{1+3}{4} = 1 \end{array}$$

$$Per\;\; t = -\frac{1}{2}\;\; si\; ha$$

$$sen\, x = -\frac{1}{2} \begin{array}{l} \nearrow \;\; x = 210° + k\, 360° \\ \searrow \;\; x = 330° + k\, 360° \end{array}$$

*e*

$$per\;\; t = 1\;\; si\; ha$$

$$sen\, x = 1 \rightarrow x = 90° + k\, 360°$$

**ESERCIZIO N°5**

*Risolvere l'equazione*

$$\cos 2x - \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$$

*Ricordando*

- *la regola di duplicazione per il coseno, cioè*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

- *la regola di duplicazione per il seno, cioè*

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

- *la seconda relazione fondamentale della goniometria, cioè*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

*l'equazione data si può scrivere*

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

*Svolgendo i calcoli si ottiene*

$$1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$$

*Si ricavano le due equazioni goniometriche elementari*

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \begin{matrix} \nearrow & x = 210° + k\,360° \\ \searrow & x = 330° + k\,360° \end{matrix}$$

*e*

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \begin{matrix} \nearrow & x = 30° + k\,360° \\ \searrow & x = 150° + k\,360° \end{matrix}$$

*Si osserva che l'insieme delle soluzioni si può anche scrivere* $x = \pm 30° + k\,180°$