

Goniometria

Equazioni goniometriche

EQUAZIONI GONIOMETRICHE RISOLTE UTILIZZANDO

LE FORMULE DI PROSTAFERESI

ESERCIZIO N°1

Risolvere l'equazione

$$\cos 3x + \cos x = 0$$

Ricordando la regola della somma dei coseni, cioè

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

si può scrivere

$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 0$$

Ossia

$$2 \cos 2x \cos x = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, si può scrivere

1 fattore

$$2 \cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

2 fattore

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Si osserva che l'equazione data è lineare ed omogenea, pertanto, si può risolverla anche nel seguente modo:

$$\cos 3x = -\cos x$$

Per la regola degli angoli supplementari e per la regola degli angoli opposti per il coseno si ha

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\cos(-x)$$

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \rightarrow 3x = \pi - x + 2k\pi \rightarrow 4x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

$$3x = -(\pi - x) + 2k\pi \rightarrow 3x = -\pi + x + 2k\pi \rightarrow 2x = -\pi + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

ESERCIZIO N°2

Risolvere l'equazione

$$\cos 4x - \cos 2x + \sin x = 0$$

Ricordando la regola della differenza dei coseni, cioè

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

si può scrivere

$$\cos 4x - \cos 2x = -2 \sin \frac{4x+2x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2} = -2 \sin 3x \sin x$$

Quindi andando a sostituire si ottiene

$$-2 \sin 3x \sin x + \sin x = 0$$

Mettendo in evidenza il fattore $\sin x$ si ha

$$\sin x (-2 \sin 3x + 1) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, $a \times b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, si può scrivere

1 fattore

$$\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi \rightarrow x = k\pi$$

2 fattore

$$-2 \sin 3x + 1 = 0 \rightarrow -2 \sin 3x = -1 \rightarrow 2 \sin 3x = 1 \rightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}$$

Cioè

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2}{3} \pi$$

e

$$3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow 3x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{5}{18}\pi + k \frac{2}{3} \pi$$

In gradi sessagesimali si hanno le seguenti famiglie di soluzioni

$$x = k 180^\circ$$

$$x = 10^\circ + k 120^\circ$$

$$x = 50^\circ + k 120^\circ$$