Goniometria

FORMULE DI WERNER

Le formule di Werner si utilizzano per trasformare in una somma o in una differenza di coseni o di seni il prodotto di un seno per un coseno oppure di due coseni o di due seni.

$$\mathbf{sen\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]}$$

$$\mathbf{cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)]}$$

$$\mathbf{sen\,\alpha\,sen\,\beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)]}$$

Si vuole dimostrare la *prima regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\,cos\beta + cos\alpha\,sen\beta}$$

$$\mathbf{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\,cos\beta - cos\alpha\,sen\beta}$$

***Addizionando* membro a membro si ha**

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\,cos\beta + sen\alpha\,cos\beta + cos\alpha\,sen\beta - cos\alpha\,sen\beta}$$

Cioè

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta) = 2sen\alpha\,cos\beta}$$

Ossia invertendo i membri si ottiene

$$\mathbf{2sen\alpha\,cos\beta = sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}$$

E dividendo ambo i membri per 2

$$\mathbf{\frac{2sen\alpha\,cos\beta}{2} = \frac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{2}}$$

si trova la *prima regola*.

Analogamente si procede per dimostrare le altre due regole utilizzando le formule di addizione e sottrazione per il coseno.

Johann Werner matematico tedesco del XI secolo.

ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO LE FORMULE DI WERNER

ESERCIZIO N°1

Calcolare $\textit{sen}\ 75°\ \textit{cos}\ 15°$

Si applica la regola

$$\mathbf{sen\ \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]}$$

Pertanto, se $\alpha = 75°$ e $\beta = 15°$ si ha

$$\text{sen } 75° \cos 15° = \frac{1}{2}[\text{sen}(75° + 15°) + \text{sen}(75° - 15°)]$$

Cioè

$$\text{sen } 75° \cos 15° = \frac{1}{2}[\text{sen } 90° + \text{sen } 60°] = \frac{1}{2} \times \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

ESERCIZIO N°2

Calcolare $\textit{sen}\ 105°\ \textit{sen}\ 15°$

Si applica la regola

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

Pertanto, se $\alpha = 105°$ e $\beta = 15°$ si ha

$$\text{sen } 105° \text{ sen } 15° = -\frac{1}{2}[\cos(105° + 15°) - \cos(105° - 15°)]$$

Cioè

$$\text{sen } 105° \text{ sen } 15° = -\frac{1}{2}[\cos 120° - \cos 90°]$$

Ricordando che per gli archi associati si ha

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

e sapendo che $\cos 90° = 0$

Sostituendo si ottiene

$$\text{sen } 105° \text{ sen } 15° = -\frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$