Goniometria

LE FORMULE DI BISEZIONE

DIMOSTRAZIONE

Ricordando la formula di duplicazione per il coseno di un angolo, ossia

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta$$

Ponendo

$$2\beta = \alpha \;\; si\, ricava\, che \;\; \beta = \frac{\alpha}{2}$$

Pertanto, sostituendo ha senso scrivere

$$\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

Cioè

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Estraendo ambo i membri la radice quadrata si ottiene

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Ossia la formula di bisezione per il seno di un angolo.

Analogamente ricordando la formula di duplicazione per il coseno di un angolo

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

Ponendo

$$2\beta = \alpha \;\; si\, ricava\, che \;\; \beta = \frac{\alpha}{2}$$

Pertanto, sostituendo ha senso scrivere

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

Cioè

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Estraendo ambo i membri la radice quadrata si ottiene

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Ossia la formula di bisezione per il coseno di un angolo.

Osservazioni

Per determinare la formula di bisezione per la tangente di un angolo, si utilizza la seconda relazione fondamentale della goniometria

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

E sostituendo le regole suddette di bisezione per il seno e per il coseno ha senso scrivere

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} : \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Ossia

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

Per determinare la formula di bisezione per la cotangente di un angolo, si utilizza la terza relazione fondamentale della goniometria

$$\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$$

Pertanto, si ha

$$\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad \text{con } \alpha \neq 2k\pi$$

Le formule di bisezione per la tangente e per la cotangente si possono scrivere sotto forma razionale:

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \ \text{con } \alpha \neq 2k\pi \ \text{ oppure } \ \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sens}\,\alpha}{1+\cos\alpha} \ \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

e

$$\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \ \text{con } \alpha \neq 2k\pi \ \text{ oppure } \ \text{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sens}\,\alpha}{1-\cos\alpha} \ \text{con } \alpha \neq 2k\pi$$

ESERCIZIO N°1

Calcolare il valore del coseno dell'angolo di ampiezza 22° 30'

Osservando che

$$22° \, 30' = \frac{45°}{2}$$

e sapendo che la formula di bisezione per il coseno di un angolo è

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Ha senso scrivere

$$\cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$$

Ossia

$$\cos 22° \, 30' = \cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ESERCIZIO N°2

Calcolare il valore del seno dell'angolo di ampiezza 157° 30'

Applicando una regola degli angoli associati si ha

$$\text{sen}\, 157° \, 30' = \text{sen}(180 - 22° \, 30') = \text{sen}\, 22° \, 30' = \text{sen}\frac{45°}{2}$$

e sapendo che la formula di bisezione per il seno di un angolo è

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Ha senso scrivere

$$\text{sen}\, 157° \, 30' = \text{sen}\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Osservazioni

Essendo $22°\,30'$ e $67°\,30'$ angoli complementari si ottiene che

$$\cos 22°\,30' = \operatorname{sen} 67°\,30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

e

$$\operatorname{sen} 22°\,30' = \cos 67°\,30' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Mentre

$$\operatorname{tg} 22°\,30' = \frac{\operatorname{sen} 22°\,30'}{\cos\ 22°\,30'} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} : \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Ossia

$$\operatorname{tg} 22°\,30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{(2-\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}-1$$

Inoltre

$$\operatorname{tg} 22°\,30' = \operatorname{ctg} 67°\,30' = \sqrt{2}-1$$

e

$$\operatorname{ctg} 22°\,30' = \operatorname{tg} 67°\,30' = \sqrt{2}+1$$