Goniometria

FORMULE DI PROSTAFERESI

Le formule di prostaferesi si utilizzano per trasformare la somma o la differenza di due seni o di due coseni in prodotti.

$$\mathrm{sen}\,p+\mathrm{sen}\,q=2\mathrm{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,p-\mathrm{sen}\,q=2\cos\frac{p+q}{2}\,\mathrm{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\mathrm{sen}\frac{p+q}{2}\,\mathrm{sen}\frac{p-q}{2}$$

Si vuole dimostrare la *prima regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

$$\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

***Addizionando* membro a membro si ha**

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}\alpha\cos\beta+\mathrm{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$$

Cioè

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=2\mathrm{sen}\alpha\cos\beta$$

Ponendo

$$\alpha+\beta=p \quad \text{e} \quad \alpha-\beta=q$$

si mettono a sistema le due relazioni per calcolare α e β in funzione di p e q

Pertanto, ha senso scrivere

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \text{ addizionando membro a membro si ha}$$

$$2\alpha=p+q\rightarrow\alpha=\frac{p+q}{2}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \text{ sottraendo membro a membro si ha}$$

$$2\beta=p-q\rightarrow\beta=\frac{p-q}{2}$$

Quindi andando a sostituire nella relazione

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\,cos\beta}$$

i valori trovati e le posizione fatte si ottiene la regola che si voleva dimostrare

$$\mathbf{sen\ p+sen\ q=2sen\frac{p+q}{2}\ cos\frac{p-q}{2}}$$

Si vuole dimostrare la *seconda regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\,cos\beta+cos\alpha\,sen\beta}$$

$$\mathbf{sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\,cos\beta-cos\alpha\,sen\beta}$$

***Sottraendo* membro a membro si ha**

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\,cos\beta-sen\alpha\,cos\beta+cos\alpha\,sen\beta+cos\alpha\,sen\beta}$$

Cioè

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2cos\alpha\,sen\beta}$$

Ponendo

$$\mathbf{\alpha+\beta=p\ \ e\ \ \alpha-\beta=q}$$

si mettono a sistema le due relazioni per calcolare α e β in funzione di p e q

Pertanto, ha senso scrivere

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}\ \text{addizionando membro a membro si ha}$$

$$\mathbf{2\alpha=p+q\rightarrow\alpha=\frac{p+q}{2}}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}\ \text{sottraendo membro a membro si ha}$$

$$\mathbf{2\beta=p-q\rightarrow\beta=\frac{p-q}{2}}$$

Quindi andando a sostituire nella relazione

$$\mathbf{sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2cos\alpha\,sen\beta}$$

i valori trovati e le posizione fatte si ottiene la seconda regola che si voleva dimostrare

$$\mathbf{sen\ p-sen\ q=2cos\frac{p+q}{2}\ sen\frac{p-q}{2}}$$

Analogamente si procede per dimostrare le altre due regole utilizzando le formule di addizione e sottrazione per il coseno.

ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO LE FORMULE DI PROSTAFERESI

ESERCIZIO N°1

Calcolare $sen\ 285° + sen\ 15°$

Si applica la regola

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2\text{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Pertanto, se $p = 285°$ e $q = 15°$ si ha

$$\text{sen } 285° + \text{sen } 15° = 2\text{sen}\frac{285° + 15°}{2}\cos\frac{285° - 15°}{2}$$

Cioè

$$\text{sen } 285° + \text{sen } 15° = 2\text{sen}\frac{300°}{2}\cos\frac{270°}{2} = 2\text{sen } 150° \cos 135°$$

E osservando che

$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

e

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ha

$$\text{sen } 285° + \text{sen } 15° = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO N°2

Calcolare $cos\ 285° - cos\ 15°$

Si applica la regola

$$\cos p - \cos q = -2\text{sen}\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\frac{p-q}{2}$$

Pertanto, se $p = 285°$ e $q = 15°$ si ha

$$\cos 285° - \cos 15° = -2\text{sen}\frac{285° + 15°}{2}\,\text{sen}\frac{285° - 15°}{2}$$

Cioè

$$\cos 285° - \cos 15° = -2\text{sen}\frac{300°}{2}\ \text{sen}\frac{270°}{2} = -2\text{sen } 150°\text{sen } 135°$$

E osservando che

$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

e

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si ha

$$\cos 285° - \cos 15° = -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO N°3

Calcolare $\textit{sen}\ 135° - \textit{sen}\ 15°$

Si applica la regola

$$\text{sen p} - \text{sen q} = 2\cos\frac{\text{p}+\text{q}}{2}\ \text{sen}\frac{\text{p}-\text{q}}{2}$$

Pertanto, se $\text{p} = 135°$ **e** $\text{q} = 15°$ **si ha**

$$\text{sen } 135° - \text{sen } 15° = 2\cos\frac{135° + 15°}{2}\ \text{sen}\frac{135° - 15°}{2}$$

Cioè

$$\text{sen } 135° - \text{sen } 15° = 2\cos\frac{150°}{2}\ \text{sen}\frac{120°}{2} = 2\cos 75°\text{sen } 60°$$

E osservando che

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

e

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si ha

$$\text{sen } 285° - \text{sen } 15° = 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$