

[Goniometria](#)

LE FORMULE DI TRIPLICAZIONE

ESERCIZIO N°1

Calcolare il valore del seno dell'angolo 3α

Osservando che

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha$$

si applica la seguente formula di addizione

$$\text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen}2\alpha \cos\alpha + \cos2\alpha \text{sen}\alpha$$

Ricordando le formule di duplicazione

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha \text{ e } \cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

e sostituendo si ha

$$\text{sen}3\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha \times \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \text{sen}\alpha$$

Ossia

$$\text{sen}3\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos^2\alpha + \text{sen}\alpha \cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$$

Cioè

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha \cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$$

Poiché

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

Sostituendo si ha

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^3\alpha$$

Cioè

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 3\text{sen}^3\alpha - \text{sen}^3\alpha$$

Ossia

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

Ossia la formula di **triplicazione per il seno** di un angolo.

ESERCIZIO N°2

Calcolare il valore del coseno dell'angolo 3α

Osservando che

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha$$

si applica la seguente formula di addizione

$$\cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

Ricordando le formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \text{ e } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

e sostituendo si ha

$$\cos 3\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha \times \sin \alpha$$

Ossia

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Cioè

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Poiché

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

Sostituendo si ha

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$$

Cioè

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha + 3\cos^3 \alpha$$

Ossia

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

Ossia la formula di **triplicazione per il coseno** di un angolo.

Esempi numerici

Se $\alpha = 30^\circ$ si ottiene

$$\sin(3 \times 30^\circ) = 3\sin 30^\circ - 4\sin^3 30^\circ = 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \sin 90^\circ$$

$$\cos(3 \times 30^\circ) = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ = 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 = \cos 90^\circ$$