IL NUMERO DI NEPERO

Il numero di Nepero è un numero trascendente irrazionale indicato con il simbolo “e”, che approssimato alla sua quarta cifra decimale vale 2,7182. Giovanni Nepero è il nome italianizzato di John Napier (matematico scozzese del 1600). La prima espressione di “e” intesa come una costante è stata trovata da Jakob Bernoulli (matematico svizzero del 1700). La sua prima citazione è stata rappresentata con la lettera “b” e compare in due lettere di Gottfried Leibniz (matematico tedesco del 1700). E’stato Leonhard Euler (matematico svizzero di fine 1700) ad usare la lettera “e” per indicare la costante nel 1727, infatti il primo uso di “e” compare nell’opera “Mechanica” di Eulero (nome italianizzato). Oggi la lettera “e” è il simbolo definitivo per indicare il numero di Nepero (o costante di Eulero).

- **La costante di Nepero si può definire nel seguente modo**

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Sostituendo ad n la successione dei numeri naturali si ottengono, ad esempio, i seguenti valori

$$n=1 \to a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

$$n=2 \to a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25$$

$$n=3 \to a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2,37$$

$$n=4 \to a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2,44$$

$$n=10 \to a_{10}=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=\left(\frac{11}{10}\right)^{10}\approx 2,59$$

$$n=50 \to a_{10}=\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}=\left(\frac{51}{50}\right)^{50}\approx 2,69$$

$$n=60 \to a_{60}=\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60}=\left(\frac{61}{60}\right)^{60}\approx 2,70$$

$$n=120 \to a_{120}=\left(1+\frac{1}{120}\right)^{120}=\left(\frac{121}{120}\right)^{120}\approx 2,71$$

Osservazioni

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^\infty \; forma\ d'indecisione$$

Il limite suddetto fa parte della famiglia dei *limiti notevoli.*

Nel calcolo dei limiti si presentano a volte delle forme che a priori non permettono di stabilire il risultato, esse vengono chiamate forme di indecisione o indeterminate. Le forme indeterminate sono sette:

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$+\infty-\infty$	$0\cdot\infty$	1^{∞}	∞^{0}	0^{0}

La costante di Nepero approssimata alla sua decima cifra decimale è

$$e = 2,7182818225$$

- Il numero di Nepero può essere definito anche come la somma della seguente serie numerica

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(Si legge: "sommatoria di 1 su n fattoriale al variare di n da 0 a ∞"

Esplicitando la serie ha senso scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots =$$

E sviluppando i calcoli si ottiene

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Indicando con $\{a_n\}$ la successione della serie numerica allora si ha

$$a_0 = 1\,;\ a_1 = 1\,;\ a_2 = \frac{1}{2}\ ;\ a_3 = \frac{1}{6}\ ;\ a_4 = \frac{1}{24}\ \ldots$$

Si costruisce una nuova successione numerica indicata con $\{s_n\}$ e definita nel seguente modo

$s_0 = a_0 = 1$

$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{15+1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \approx 2,67$

$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{8}{3} + \frac{1}{24} = \frac{64+1}{24} = \frac{65}{24} \approx 2,71$

Pertanto, iterando il procedimento si può dedurre che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = e$$

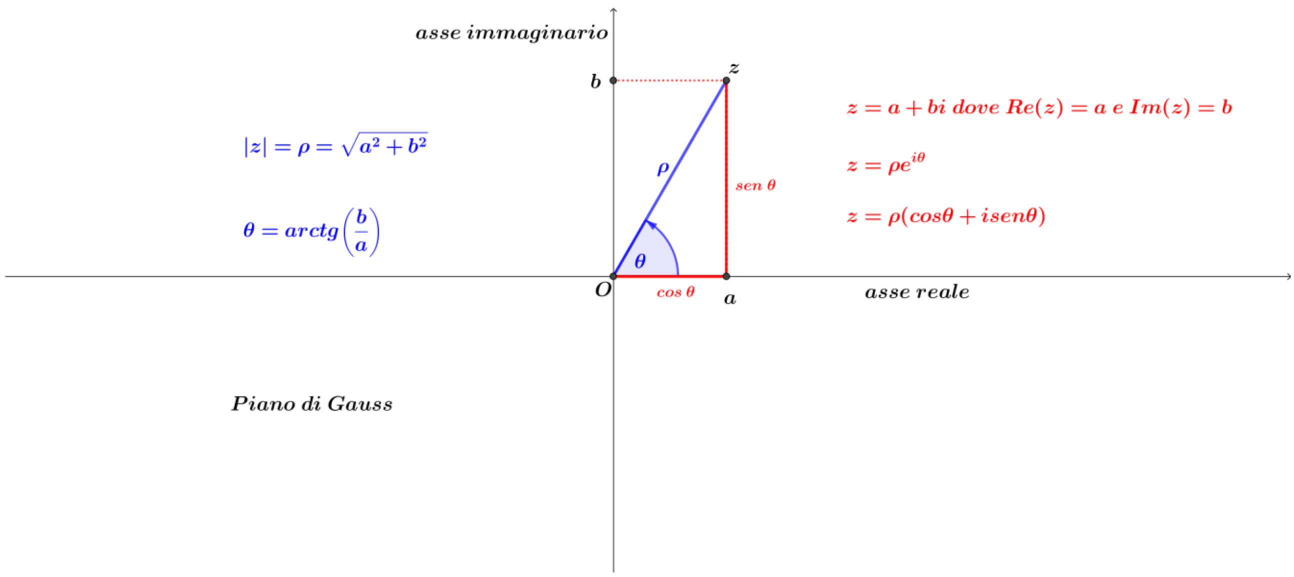
Il numero e è il limite della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali degli infiniti addendi ottenuti dalla successione (a_n).

Il numero di Nepero si trova anche nell'equazione di Eulero che mette in relazione una forma esponenziale di un numero complesso con una forma trigonometrica. Sia z un numero complesso, ossia un numero appartenente al campo di Gauss, esso si può scrivere nelle seguenti forme

- ✓ $z = a + ib$ forma algebrica
- ✓ $z = \rho e^{i\theta}$ forma esponenziale
- ✓ $z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)$ forma trigonometrica

Ponendo l'uguaglianza tra la forma esponenziale e la forma trigonometrica, ha senso scrivere

$$\rho e^{i\theta} = \rho(cos\theta + i\ sen\theta) \ \rightarrow e^{i\theta} = cos\theta + i\ sen\theta \ \ \textbf{Formula di Eulero}$$



Caso particolare

Supponendo che $\theta = \pi$ $(\theta = 180°)$ si ha

$$e^{i\pi} = cos\,\pi + i\ sen\,\pi$$

$$e^{i\pi} = -1 + i0 \rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{Identità di Eulero}$$

e , i , π , 1 , 0 sono costanti

e = costante di Nepero $\quad$ i = unità immaginaria $\quad$ π = costante di Archimede

1 = elemento neutro della moltiplicazione $\quad$ 0 = elemento neutro dell'addizione

Inoltre, il numero e compare come base particolare dei logaritmi, si chiama neperiano o naturale il seguente logaritmo $\log_e a = ln\ a$.