INTEGRALI INDEFINITI

Proprietà di omogeneità	$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \;\; con\; \alpha \in \mathbb{R}$
Proprietà additiva	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
Proprietà di linearità	$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \;\; con\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Regola della potenza	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \;\; con\; n \neq -1 \; e\; n, k \in \mathbb{R}$

1)

$$\int 3x^2 dx$$

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + k = x^3 + k$$

2)

$$\int 10x^4 dx$$

$$\int 10x^4 dx = 10 \int x^4 dx = 10 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = 10 \cdot \frac{x^5}{5} + k = 2x^5 + k$$

3)

$$\int \frac{5}{x^3} dx$$

$$\int \frac{5}{x^3} dx = 5 \int x^{-3} dx = 5 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k = 5 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{5}{2x^2} + k$$

4)

$$\int \frac{2}{x^6} dx$$

$$\int \frac{2}{x^6} dx = 2 \int x^{-6} dx = 2 \cdot \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + k = 2 \cdot \frac{x^{-5}}{-5} + k = -\frac{2}{5x^5} + k$$

5)

$$\int 4\sqrt{x}\, dx$$

$$\int 4\sqrt{x}\, dx = 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + k = \frac{8}{3} x\sqrt{x} + k$$

6)

$$\int 7x\sqrt[3]{x}\, dx$$

$$\int 7x\sqrt[3]{x}\, dx = 7 \int \sqrt[3]{x^4} dx = 7 \int x^{\frac{4}{3}} dx = 7 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + k = 7 \cdot \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} = 3\sqrt[3]{x^7} + k = 3x^2\sqrt[3]{x} + k$$

7)

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x} + k$$

8)

$$\int (4x^2+3x)dx$$

$$\int (4x^2+3x)dx = 4\int x^2 dx + 3\int x\,dx = 4\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + k = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + k$$

9)

$$\int (3x^2+2x+1)dx$$

$$\int (3x^2+2x+1)dx = 3\int x^2 dx + 2\int x\,dx + \int dx = 3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + x + k =$$

$$= x^3 + x^2 + x + k$$

10)

$$\int \sqrt{2x}\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$2x = t \to d(2x) = dt \to 2dx = dt \to dx = \frac{1}{2}dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \sqrt{2x}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + k = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$\frac{1}{3}t\sqrt{t} + k = \frac{1}{3}\cdot 2x\sqrt{2x} + k = \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int \sqrt{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3} + k = \frac{2x}{3}\sqrt{2x} + k$$

11)

$$\int e^{3x}\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$3x = t \to d(3x) = dt \to 3dx = dt \to dx = \frac{1}{3}dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int e^{3x}\,dx = \int e^t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^t\cdot dt = \frac{1}{3}\cdot e^t + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$\frac{1}{3}e^t + k = \frac{1}{3}\cdot e^{3x} + k = \frac{e^{3x}}{3} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x) = \frac{e^{3x}}{3} + k$$

12)

$$\int sen\,2x\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$2x = t \to d(2x) = dt \to 2dx = dt \to dx = \frac{1}{2}dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int sen\,2x\,dx = \int sen\,t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int sen\,t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$-\frac{1}{2}\cos t + k = -\frac{1}{2}\cos 2x + k = -\frac{\cos 2x}{2} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int sen\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\int sen\, 2x\, d(2x) = -\frac{\cos 2x}{2} + k$$

N.B.: l'integrale dato può essere risolto con la regola di integrazione per parti.

13)

$$\int x\, sen\, x^2\, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$x^2 = t \to d(x^2) = dt \to 2x\, dx = dt \to x\, dx = \frac{1}{2}dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int x\, sen\, x^2\, dx = \int sen\, t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int sen\, t\, dt = -\frac{1}{2}\cos \overbrace{t}^{x^2} + k = -\frac{\cos x^2}{2} + k$$

14)

$$\int e^x \cos e^x\, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$e^x = t \to d(e^x) = dt \to e^x\, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int e^x \cos e^x\, dx = \int \cos t\, dt = sen\, \overbrace{t}^{e^x} + k = sen\, e^x + k$$

15)

$$\int \cos x\, sen(senx)\, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$sen\, x = t \to d(sen\, x) = dt \to cosx\, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \cos x\, sen(sen\, x)\, dx = \int sen\, t\, dt = -\cos \overbrace{t}^{sen\, x} + k = -\cos(sen\, x) + k$$

16)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$e^x = t \to d(e^x) = dt \to e^x\, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1} dx = \int \frac{1}{t^2+1} dt = arctg\, \overbrace{t}^{e^x} + k = arctg\, e^x + k$$

17)

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$\sqrt{x} = t \to x = t^2 \to dx = d(t^2) \to dx = 2t\, dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\cos t}{t}\, 2t\, dt = 2\int \cos t\, dt = 2sen\, \overbrace{t}^{\sqrt{x}} + k = 2sen\sqrt{x} + k$$

18)

$$\int \frac{sen\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$\sqrt[3]{x} = t \rightarrow x = t^3 \rightarrow dx = d\left(t^3\right) \rightarrow dx = 3t^2\,dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{sen\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{sen\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{sen\,t}{t\cdot t}\,3t^2\,dt = 3\int \frac{sen\,t}{t^2}\,t^2\,dt = 3\int sen\,t\,dt = -3cos\,t + k$$

Ma essendo

$$\sqrt[3]{x} = t$$

allora l'integrale è uguale a

$$-3cos\,\sqrt[3]{x} + k$$

19)

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$x - 3 = t \rightarrow d(x-3) = dt \rightarrow dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln\left|\overbrace{t}^{x-3}\right| + k = \ln|x-3| + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,d(x-3) = \ln|x-3| + k$$

20)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-2}\,dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = d\left(t^2\right) \rightarrow dx = 2t\,dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-2}\,dx = \int \frac{1}{t-2}\,2t\,dt = 2\int \frac{t}{t-2}\,dt =$$

Si applica "un artificio" sottraendo e aggiungendo 2 al numeratore

$$= 2\int \frac{t-2+2}{t-2}\,dt =$$

Per la proprietà additiva degli integrali ha senso scrivere

$$= 2\left(\int \frac{t-2}{t-2}\,dt + \int \frac{2}{t-2}\,dt\right) = 2\int dt + 4\int \frac{1}{t-2}dt = 2t + 4\ln|t-2| + k =$$

ma essendo

$$\sqrt{x} = t$$

si ottiene

$$= 2\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}-2\right| + k$$