

INTEGRALI INDEFINITI

Proprietà di omogeneità	$\int \alpha x dx = \alpha \int x dx$ con $\alpha \in \mathbb{R}$
Proprietà additiva	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
Proprietà di linearità	$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Regola della potenza	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ con $n \neq -1$ e $n, k \in \mathbb{R}$

1)

$$\int 3x^2 dx$$

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + k = x^3 + k$$

2)

$$\int 10x^4 dx$$

$$\int 10x^4 dx = 10 \int x^4 dx = 10 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = 10 \cdot \frac{x^5}{5} + k = 2x^5 + k$$

3)

$$\int \frac{5}{x^3} dx$$

$$\int \frac{5}{x^3} dx = 5 \int x^{-3} dx = 5 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k = 5 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{5}{2x^2} + k$$

4)

$$\int \frac{2}{x^6} dx$$

$$\int \frac{2}{x^6} dx = 2 \int x^{-6} dx = 2 \cdot \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + k = 2 \cdot \frac{x^{-5}}{-5} + k = -\frac{2}{5x^5} + k$$

5)

$$\int 4\sqrt{x} dx$$

$$\int 4\sqrt{x} dx = 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + k = \frac{8}{3} x\sqrt{x} + k$$

6)

$$\int 7x^3\sqrt{x} dx$$

$$\int 7x^3\sqrt{x} dx = 7 \int \sqrt{x^4} dx = 7 \int x^{\frac{4}{3}} dx = 7 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + k = 7 \cdot \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} = 3^3 \sqrt{x^7} + k = 3x^2\sqrt{x} + k$$

7)

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x} + k$$

8)

$$\int (4x^2 + 3x) dx$$

$$\int (4x^2 + 3x) dx = 4 \int x^2 dx + 3 \int x dx = 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + k = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + k$$

9)

$$\int (3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 2x + 1) dx &= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + x + k = \\ &= \frac{3}{2}x^3 + x^2 + x + k \end{aligned}$$

10)

$$\int \sqrt{2x} dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il **metodo di sostituzione** facendo un **cambio di variabile**, si pone

$$2x = t \rightarrow d(2x) = dt \rightarrow 2dx = dt \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \sqrt{2x} dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + k = \frac{1}{3} t \sqrt{t} + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$\frac{1}{3} t \sqrt{t} + k = \frac{1}{3} \cdot 2x \sqrt{2x} + k = \frac{2}{3} x \sqrt{2x} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int \sqrt{2x} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x} d(2x) = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x} d(2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2x)^3} + k = \frac{2x}{3} \sqrt{2x} + k$$

11)

$$\int e^{3x} dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il **metodo di sostituzione** facendo un **cambio di variabile**, si pone

$$3x = t \rightarrow d(3x) = dt \rightarrow 3dx = dt \rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int e^{3x} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot e^t + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$\frac{1}{3} e^t + k = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + k = \frac{e^{3x}}{3} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{e^{3x}}{3} + k$$

12)

$$\int \text{sen } 2x dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il **metodo di sostituzione** facendo un **cambio di variabile**, si pone

$$2x = t \rightarrow d(2x) = dt \rightarrow 2dx = dt \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \text{sen } 2x dx = \int \text{sen } t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \text{sen } t dt = -\frac{1}{2} \cos t + k$$

Sostituendo nuovamente si ha

$$-\frac{1}{2} \cos t + k = -\frac{1}{2} \cos 2x + k = -\frac{\cos 2x}{2} + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando "un artificio"

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, d(2x) = -\frac{\cos 2x}{2} + k$$

N.B.: l'integrale dato può essere risolto con la regola di integrazione per parti.

13)

$$\int x \sin x^2 \, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$x^2 = t \rightarrow d(x^2) = dt \rightarrow 2x \, dx = dt \rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int x \sin x^2 \, dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{2} \cos \hat{t} + k = -\frac{\cos x^2}{2} + k$$

14)

$$\int e^x \cos e^x \, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$e^x = t \rightarrow d(e^x) = dt \rightarrow e^x \, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int e^x \cos e^x \, dx = \int \cos t \, dt = \sin \hat{t} + k = \sin e^x + k$$

15)

$$\int \cos x \sin(\sin x) \, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$\sin x = t \rightarrow d(\sin x) = dt \rightarrow \cos x \, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \cos x \sin(\sin x) \, dx = \int \sin t \, dt = -\cos \hat{t} + k = -\cos(\sin x) + k$$

16)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$e^x = t \rightarrow d(e^x) = dt \rightarrow e^x \, dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} \, dx = \int \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \arctg \hat{t} + k = \arctg e^x + k$$

17)

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$$

Per calcolare l'integrale si applica il metodo di sostituzione facendo un cambio di variabile, si pone

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = d(t^2) \rightarrow dx = 2t \, dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{\cos t}{t} 2t \, dt = 2 \int \cos t \, dt = 2 \sin \hat{t} + k = 2 \sin \sqrt{x} + k$$

18)

$$\int \frac{\text{sen } \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Per calcolare l'integrale si applica **il metodo di sostituzione** facendo **un cambio di variabile**, si pone

$$\sqrt[3]{x} = t \rightarrow x = t^3 \rightarrow dx = d(t^3) \rightarrow dx = 3t^2 dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{\text{sen } \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{\text{sen } \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{\text{sen } t}{t \cdot t} 3t^2 dt = 3 \int \frac{\text{sen } t}{t^2} t^2 dt = 3 \int \text{sen } t dt = -3 \cos t + k$$

Ma essendo

$$\sqrt[3]{x} = t$$

allora l'integrale è uguale a

$$-3 \cos \sqrt[3]{x} + k$$

19)

$$\int \frac{1}{x-3} dx$$

Per calcolare l'integrale si applica **il metodo di sostituzione** facendo **un cambio di variabile**, si pone

$$x-3 = t \rightarrow d(x-3) = dt \rightarrow dx = dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln \left| \overset{x-3}{\hat{t}} \right| + k = \ln|x-3| + k$$

L'integrale dato si può risolvere, più rapidamente nel seguente modo, applicando **"un artificio"**

$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{x-3} d(x-3) = \ln|x-3| + k$$

20)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-2} dx$$

Per calcolare l'integrale si applica **il metodo di sostituzione** facendo **un cambio di variabile**, si pone

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = d(t^2) \rightarrow dx = 2t dt$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-2} dx = \int \frac{1}{t-2} 2t dt = 2 \int \frac{t}{t-2} dt =$$

Si applica **"un artificio"** sottraendo e aggiungendo **2** al numeratore

$$= 2 \int \frac{t-2+2}{t-2} dt =$$

Per **la proprietà additiva degli integrali** ha senso scrivere

$$= 2 \left(\int \frac{t-2}{t-2} dt + \int \frac{2}{t-2} dt \right) = 2 \int dt + 4 \int \frac{1}{t-2} dt = 2t + 4 \ln|t-2| + k =$$

ma essendo

$$\sqrt{x} = t$$

si ottiene

$$= 2\sqrt{x} + 4 \ln|\sqrt{x}-2| + k$$