[Home page]

[Algebra] [Trigonometria]

FORMA ESPONENZIALE DEI NUMERI COMPLESSI ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO N°1

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$z = \sqrt{3} + i$$

Dato il numero complesso nella forma cartesiana (algebrica), ovvero nella forma $z = a + bi$ **, bisogna scriverlo nella forma esponenziale** $z = \rho\, e^{i\,\theta}$

Sapendo che

$$a = \rho \cos\theta \;\; e \;\; b = \rho\, sen\,\theta$$

si ricava che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \;\; e \;\; \theta = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Quindi essedo $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$ **si può scrivere**

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \; (modulo\; di\; z)$$

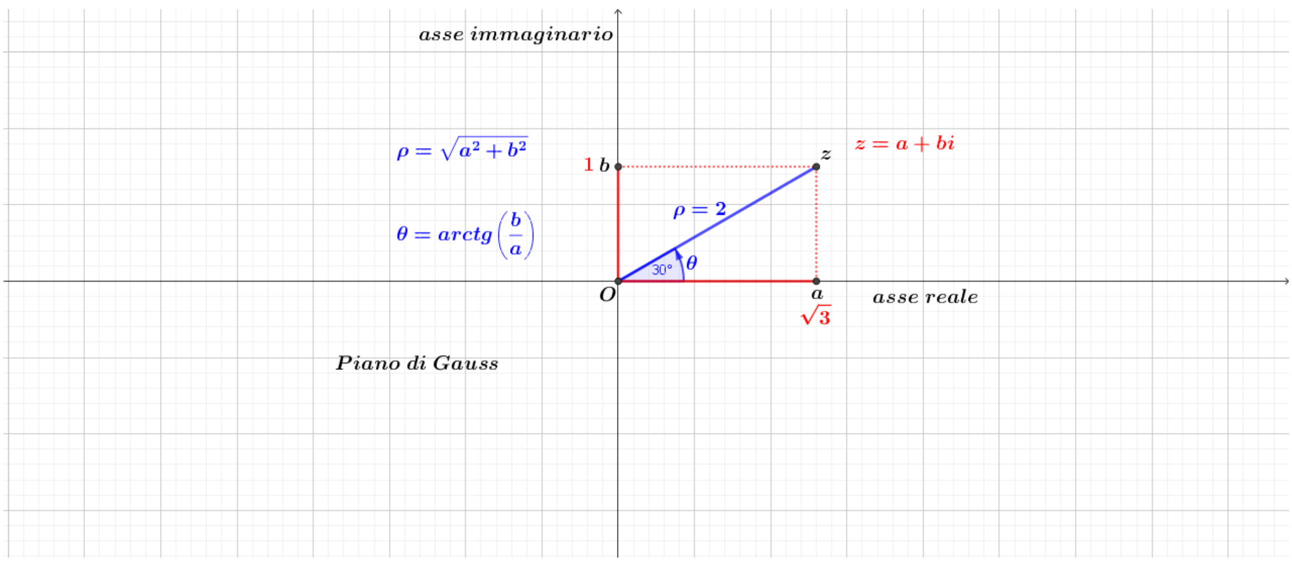
Mentre per calcolare l'ampiezza dell'angolo θ **si ha**

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = arc\,tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30° \; (argomento\; di\; z)$$

Pertanto, si ottiene

$$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\,30°} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Graficamente si ha



ESERCIZIO N°2

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Dato il numero complesso nella forma cartesiana, ovvero nella forma $z = a + bi$ **, bisogna scriverlo nella forma esponenziale** $z = \rho\, e^{i\,\theta}$

Sapendo che

$$a = \rho \cos\theta \;\; e \;\; b = \rho\, sen\,\theta$$

si ricava che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \;\; e \;\; \theta = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Quindi essedo $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$ **si può scrivere**

$$\rho = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \;\; (modulo\ di\ z)$$

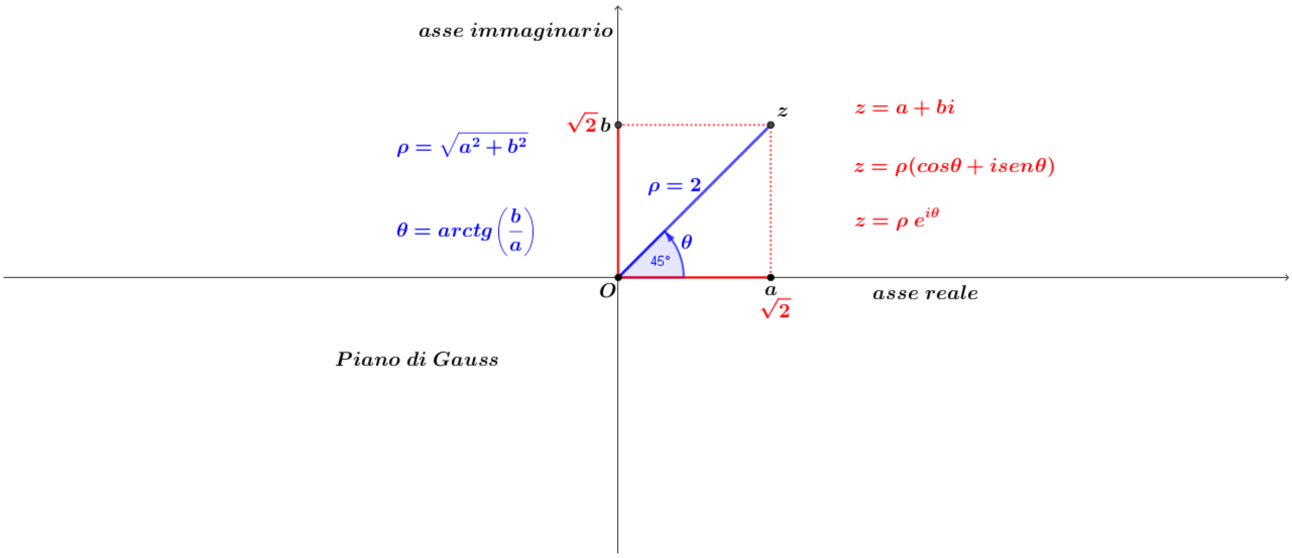
Mentre per calcolare l'ampiezza dell'angolo θ **si ha**

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = arc\,tg\,(1) = \frac{\pi}{4} \;\; (argomento\ di\ z)$$

Pertanto, si ottiene

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Graficamente si ha



Osservazione

Il numero complesso scritto in forma trigonometrica è

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\,\frac{\pi}{4})$$

ESERCIZIO N°3

Determinare e rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che verificano le condizioni

$$|z| = 2 \;\; e \;\; Re(z) = 1$$

In questo esercizio si conosce il modulo di z , ossia $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

Inoltre si sa il valore della parte reale, cioè $Re(z) = a = 1$

Pertanto, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} \sqrt{1^2 + b^2} = 2 \\ a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 4 - 1 \\ a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \nearrow b = \pm\sqrt{3} \\ a = 1 \searrow \; a = 1 \end{cases}$$

Pertanto, si trovano due numeri complessi che verificano le condizioni iniziali, cioè

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i \;\; e \;\; z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

Sapendo che un numero complesso espresso nella forma esponenziale è del tipo $z = \rho\, e^{\,i\,\theta}$

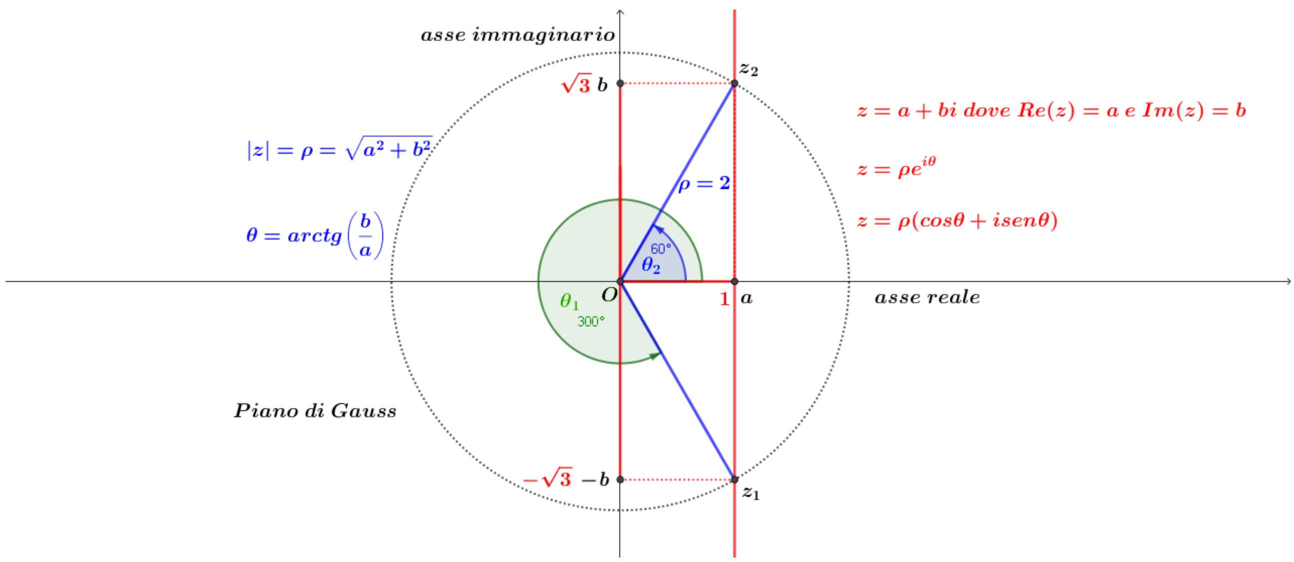
bisogna calcolare le ampiezze degli angoli $\theta_1 \;\; e \;\; \theta_2$**, pertanto, osservando che nel piano di Gauss** z_1 **è situato nel quarto quadrante si ha**

$$\theta_1 = arc\,tg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = arctg\,(-\sqrt{3}) = \frac{5}{3}\pi \;\; quindi\; la\; forma\; esponenziale\; \text{è} \;\; z_1 = 2e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

Mentre essendo z_2 **è situato nel primo quadrante si ha**

$$\theta_2 = arc\,tg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = arctg\,(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi \;\; quindi\; la\; forma\; esponenziale\; \text{è} \;\; z_2 = 2e^{i\frac{1}{3}\pi}$$

Graficamente si ha



ESERCIZIO N°4

Determinare e rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che verificano le condizioni

$$|z| = \sqrt{2} \ \ e \ \ Re(z) = -1$$

In questo esercizio si conosce il modulo di z , ossia $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

Inoltre si sa il valore della parte reale, cioè $Re(z) = a = -1$

Pertanto, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} \sqrt{(-1)^2 + b^2} = \sqrt{2} \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 2 - 1 \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 & \nearrow b = \pm 1 \\ a = -1 & \searrow \ a = -1 \end{cases}$$

Pertanto, si trovano due numeri complessi che verificano le condizioni iniziali, cioè

$$z_1 = -1 - i \ \ e \ \ z_2 = -1 + i$$

Sapendo che un numero complesso espresso nella forma esponenziale è del tipo $z = \rho \, e^{\, i \, \theta}$

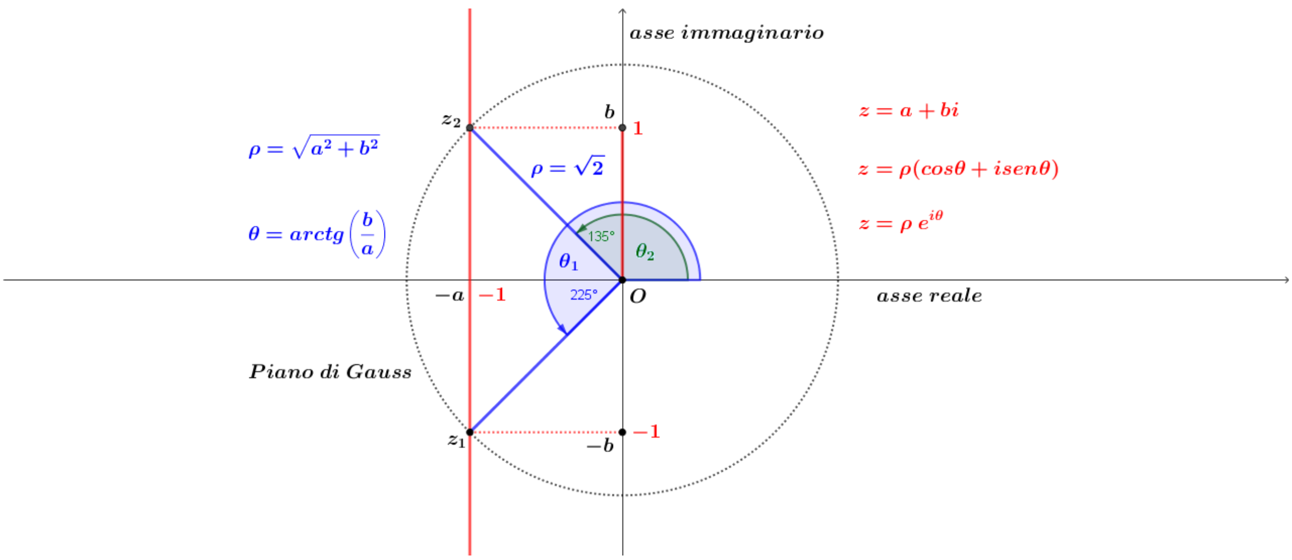
bisogna calcolare le ampiezze degli angoli $\theta_1 \ e \ \theta_2$**, pertanto, osservando che nel piano di Gauss** z_1 **è situato nel terzo quadrante si ha**

$$\theta_1 = arc\,tg\left(\frac{-1}{-1}\right) = arctg\,(1) = \frac{5}{4}\pi \ \ quindi\ la\ forma\ esponenziale\ \text{è} \ \ z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

Mentre essendo z_2 **è situato nel secondo quadrante si ha**

$$\theta_2 = arc\,tg\left(\frac{1}{-1}\right) = arctg\,(-1) = \frac{3}{4}\pi \ \ quindi\ la\ forma\ esponenziale\ \text{è} \ \ z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Graficamente si ha



ESERCIZIO N°5

Sapendo che $z = -1 + i$ *calcolare la potenza* z^5

Dato il numero complesso nella forma cartesiana, ovvero nella forma $z = a + bi$ **, conviene scriverlo nella forma esponenziale** $z = \rho\, e^{i\,\theta}$

Sapendo che

$$a = \rho \cos\theta \;\; e \;\; b = \rho\, sen\,\theta$$

si ricava che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \;\; e \;\; \theta = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Essedo $a = -1$ e $b = 1$ **si ha che** z **è situato nel secondo quadrante, quindi**

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ (modulo\ di\ z)$$

Mentre per calcolare l'ampiezza dell'angolo θ **si ha**

$$\theta = arc\,tg(-1) = \frac{3}{4}\pi\ \ (argomento\ di\ z)$$

Quindi la forma esponenziale di z **è**

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Pertanto, per calcolare la potenza del numero complesso si ha

$$z^5 = (-1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 e^{i\,\frac{3}{4}\pi\times 5} = 4\sqrt{2}e^{i\,\frac{15}{4}\pi} = 4\sqrt{2}e^{i\,2\pi+\frac{7}{4}\pi}$$

$$a = 4\sqrt{2}\cos\frac{7}{4}\pi = 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \;\; e \;\; b = 4\sqrt{2}\,sen\,\frac{7}{4}\pi = 4\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$$

Quindi si ottiene

$$z^5 = (-1 + i)^5 = 4 - 4\,i = 4(1 - i)$$

Oppure si determinano i coefficienti binomiali

$(-1)^5 \times i^0 \times 1$	$(-1)^4 \times i^1 \times 5$	$(-1)^3 \times i^2 \times 10$	$(-1)^2 \times i^3 \times 10$	$(-1)^1 \times i^4 \times 5$	$(-1)^0 \times i^5 \times 1$

$-1 \times 1 \times 1$	$1 \times i \times 5$	$-1 \times (-1) \times 10$	$1 \times (-i) \times 10$	$-1 \times 1 \times 5$	$1 \times i \times 1$

-1	$5i$	10	$-10i$	-5	i

$$z^5 = -1 + 5i + 10 - 10i - 5 + i = 4 - 4i$$

ESERCIZIO N°6

Sapendo che $z = 1 + i$ *calcolare la potenza* z^9

Dato il numero complesso nella forma cartesiana, ovvero nella forma $z = a + bi$ **, conviene scriverlo nella forma esponenziale** $z = \rho\, e^{i\,\theta}$

Sapendo che

$$a = \rho \cos\theta \;\; e \;\; b = \rho\, sen\,\theta$$

si ricava che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \;\; e \;\; \theta = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Essedo $a = 1$ e $b = 1$ **si ha che** z **è situato nel primo quadrante, quindi**

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ (modulo\ di\ z)$$

Mentre per calcolare l'ampiezza dell'angolo θ **si ha**

$$\theta = arc\,tg(1) = \frac{\pi}{4} \quad (argomento\ di\ z)$$

Quindi la forma esponenziale di z **è**

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Pertanto, per calcolare la potenza del numero complesso si ha

$$z^9 = (1 + i)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9 e^{i\ \frac{\pi}{4}\times 9} = 16\sqrt{2}e^{i\ \frac{9}{4}\pi}$$

Poiché

$$\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Ha senso scrivere

$$a = 16\sqrt{2}\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 16\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

$$e\ b = 16\sqrt{2}\,sen\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 16\sqrt{2}\,sen\,\frac{\pi}{4} = 16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Quindi si ottiene

$$z^9 = (1 + i)^9 = 16 + 16\,i = 16(1 + i)$$