OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO N°1

Calcolare la somma algebrica dei numeri

$$z_1 = 3 + 7i \quad e \quad z_2 = 8 + 2i$$

Si sommano algebricamente le parti reali tra di loro e si sommano algebricamente le parti immaginarie tra di loro, quindi si ha

$$z = z_1 + z_2 = 3 + 7i + 8 + 2i = 11 + 9i$$

ESERCIZIO N°2

Calcolare la somma algebrica dei numeri

$$z_1 = 5 - 7i \quad e \quad z_2 = -8 + 3i$$

Pertanto, si ha

$$z = z_1 + z_2 = 5 - 7i - 8 + 3i = -3 - 4i$$

ESERCIZIO N°3

Calcolare il prodotto dei numeri

$$z_1 = 5 - 7i \quad e \quad z_2 = -8 + 3i$$

Pertanto, si ha

$$z = z_1 \times z_2 = (5 - 7i)(-8 + 3i) = -40 + 15i + 56i - 21i^2$$

Sapendo che $i^2 = -1$ si ha

$$z = z_1 \times z_2 = -40 + 71i - 21(-1) = -40 + 71i + 21 = -19 + 71i$$

ESERCIZIO N°4

Calcolare il reciproco del numero

$$z = 2 + 3i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{1 \times (2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{4 + 9} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

N.B $2 - 3i$ è il coniugato di $2 + 3i$

ESERCIZIO N°5

Calcolare il reciproco del numero

$$z = 1 - i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-i} = \frac{1 \times (1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

N.B $1 + i$ è il coniugato di $1 - i$

ESERCIZIO N°6

Calcolare il quoziente dei numeri

$$z_1 = 3 + 2i \quad e \quad z_2 = 2 - i$$

Pertanto, si può scrivere

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i) \times (2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i-2}{4+1} = \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

ESERCIZIO N°7

Calcolare il quoziente dei numeri

$$z_1 = 5 - 7i \quad e \quad z_2 = -8 + 3i$$

Pertanto, si può scrivere

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5-7i}{-8+3i} = \frac{(5-7i) \times (-8-3i)}{(-8+3i)(-8-3i)} = \frac{-40-15i+56i-21}{64+9} = \frac{-61+41i}{73}$$

Cioè

$$z = -\frac{61}{73} + \frac{41}{73}i$$

ESERCIZIO N°8

Calcolare il quadrato del numero

$$z = 4 - 3i$$

Pertanto, ricordando la regola del quadrato di binomio $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

si ha

$$z^2 = (4-3i)^2 = 16 - 9 - 24i = 7 - 24i$$

ESERCIZIO N°9

Calcolare il quadrato del numero

$$z = 3 + 2i$$

Pertanto, ricordando la regola del quadrato di binomio $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

si ha

$$z^2 = (3 + 2i)^2 = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$$

ESERCIZIO N°10

Calcolare il cubo del numero

$$z = 3 + 2i$$

Pertanto, ricordando la regola del cubo della somma di monomi

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

si ha

$$z^3 = (3 + 2i)^3 = 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3$$

Sapendo che $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$ si ha

$$z^3 = (3 + 2i)^3 = 27 + 54i + 36(-1) + 8(-i) = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i$$

ESERCIZIO N°11

Calcolare il cubo del numero

$$z = 2 - 5i$$

Pertanto, ricordando la regola del cubo della differenza di monomi

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

si ha

$$z^3 = (2 - 5i)^3 = 8 - 60i + 150i^2 - 125i^3$$

Sapendo che $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$ si ha

$$z^3 = (2 - 5i)^3 = 8 - 60i + 150(-1) - 125(-i) = 8 - 60i - 150 + 125i = -142 + 65i$$

ESERCIZIO N°12

Calcolare le radici quadrate del numero

$$z = 7 - 24i$$

Pertanto, bisogna determinare un numero complesso del tipo $a + ib$ tale che il suo quadrato sia uguale al numero dato, cioè

$$(a + ib)^2 = 7 - 24i$$

Sviluppando il quadrato si ottiene

$$a^2 - b^2 + 2abi = 7 - 24i$$

Per la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi, si ha

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ ab = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} a^2 - \left(-\dfrac{12}{a}\right)^2 = 7 \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{144}{a^2} = 7 \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^4 - 7a^2 - 144 = 0 \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione biquadratica $a^4 - 7a^2 - 144 = 0$ si può utilizzare l'incognita ausiliare $t = a^2$

$$t^2 - 7t - 144 = 0 \rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{2} = \begin{matrix} \dfrac{7 - 25}{2} = -\dfrac{18}{2} = -9 \\ \dfrac{7 + 25}{2} = \dfrac{32}{2} = 16 \end{matrix}$$

La soluzione $a^2 = -9$ non è accettabile.

Se $a^2 = 16$ allora $a = \pm 4$ pertanto, si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -\dfrac{12}{4} \rightarrow b = -3 \end{cases} \rightarrow z_1 = 4 - 3i$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = +\dfrac{12}{4} \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow z_2 = -4 + 3i = -(4 - 3i)$$

N.B. $z_1 = 4 - 3i$ e $z_2 = -(4 - 3i)$ sono numeri complessi opposti.

ESERCIZIO N°13

Calcolare le radici quadrate del numero

$$z = 5 + 12i$$

Pertanto, bisogna determinare un numero complesso del tipo $a + ib$ tale che il suo quadrato sia uguale al numero dato, cioè

$$(a + ib)^2 = 5 + 12i$$

Sviluppando il quadrato si ottiene

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

Per la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi, si ha

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} a^2 - \dfrac{36}{a^2} = 5 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione biquadratica $a^4 - 5a^2 - 36 = 0$ si può utilizzare l'incognita ausiliare $t = a^2$

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{array}{l} \dfrac{5 - 13}{2} = -\dfrac{8}{2} = -4 \\ \dfrac{5 + 13}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \end{array}$$

La soluzione $a^2 = -4$ non è accettabile.

Se $a^2 = 9$ allora $a = \pm 3$ pertanto, si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{6}{3} \rightarrow b = 2 \end{cases} \rightarrow z_1 = 3 + 2i$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -\dfrac{6}{3} \rightarrow b = -2 \end{cases} \rightarrow z_2 = -3 - 2i = -(3 + 2i)$$

N.B. $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = -(3 + 2i)$ sono numeri complessi opposti.

ESERCIZIO N°14

Calcolare $\boldsymbol{i^{17}}$

Per calcolare la suddetta potenza bisogna ricordare che

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = 1$	$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$
$i^8 = 1$	$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$
..e così via..			

Pertanto basta determinare il resto della divisione tra l'esponente 17 e il divisore 4, cioè

$$\begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

$$i^{17} = i^1 = i$$

ESERCIZIO N°15

Calcolare $\boldsymbol{i^{26}}$

Per calcolare la suddetta potenza bisogna ricordare che

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$

Pertanto, basta determinare il resto della divisione tra l'esponente 26 e il divisore 4, cioè

$$\begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

$$i^{26} = i^2 = -1$$

ESERCIZIO N°16

Calcolare $\boldsymbol{i^{35}}$

Per calcolare la suddetta potenza bisogna ricordare che

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$

Pertanto, basta determinare il resto della divisione tra l'esponente 35 e il divisore 4, cioè

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

$$i^{35} = i^3 = -i$$

ESERCIZIO N°17 ***Calcolare*** $\boldsymbol{i^{40}}$

Poiché il resto della divisione tra l'esponente 40 e il divisore 4 è 0 si ha $i^{40} = i^0 = 1$