QUADRATO
Problema svolto

Dato il quadrato ABCD avente per vertici $A(3;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;-3)$ e $D(3;-3)$, determinare i punti medi del lati, la misura delle diagonali e le loro equazioni, il baricentro, il perimetro e l'area della figura. Inoltre, l'equazione sia della circonferenza inscritta che circoscritta al quadrato.

Il punto medio di un lato del quadrato è il punto che divide il lato in due parti congruenti. Indicando con M_{AB} il punto medio del lato AB, per determinare le coordinate del punto si applica la seguente formula:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Quindi, sostituendo i valori delle coordinate, si ottiene:

$$M_{AB}\left(\frac{3-3}{2};\frac{3+3}{2}\right) \quad \text{cioè} \quad M_{AB}(0;3).$$

Analogamente, si trovano gli altri punti medi, ossia:

$$M_{BC}(-3;0),\ M_{CD}(0;-3) \text{ e } M_{AD}(3;0).$$

Il quadrato ha due diagonali congruenti (***la diagonale è il segmento che congiunge due vertici opposti*****), le quali sono tra loro ortogonali. Per trovare la misura, ad esempio, della diagonale AC, si applica la seguente formula:**

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}\,.$$

Quindi, sostituendo i valori delle coordinate, si ottiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{(3+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2\cdot 36} = 6\sqrt{2}u\,.$$

Ovviamente anche la diagonale $\overline{BD} = 6\sqrt{2}u$.

Per determinare l'equazione della diagonale AC, si applica la seguente formula:

$$AC: \frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{x - x_A}{x_C - x_A}.$$

Quindi, sostituendo i valori delle coordinate, si ottiene:

$$AC: \frac{y-3}{-3-3} = \frac{x-3}{-3-3} \rightarrow AC: y = x.$$

Si osserva dal risultato suddetto che l'equazione della diagonale AC è l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Analogamente, si trova l'equazione dell'altra diagonale, ossia:

$$BD: y = -x,$$

cioè l'equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Il baricentro G del quadrato ABCD è il punto d'intersezione delle sue diagonali. Si applica la seguente formula:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right).$$

Quindi, sostituendo i valori delle coordinate, si ottiene:

$$G\left(\frac{3-3-3+3}{4}; \frac{3+3-3-3}{4}\right) \quad \text{cioè} \quad G(0;0),$$

ossia il baricentro coincide con l'origine degli assi cartesiani.

Il quadrato è un quadrilatero che ha tutti i quattro lati (*e gli angoli*) congruenti, pertanto, per determinare il perimetro, basta calcolare la misura di un lato e moltiplicarla per quattro. Per trovare la misura, ad esempio, del lato AB, osservando che i punti A e B hanno la stessa ordinata, si applica la seguente formula:

$$\overline{AB} = |x_A - x_B|.$$

Pertanto, si ottiene: $\overline{AB} = |3 - (-3)| = |+6| = 6u$.

Pertanto, il perimetro del quadrato ABCD è:

$$2p(A;B;C;D) = 4 \cdot \overline{AB} = 4 \cdot 6u = 24u.$$

L'area del quadrato è data dalla formula *lato per lato*, quindi ha senso scrivere:

$$\mathbf{A(A;B;C;D)=\overline{AB}^2=(6u)^2=36u^2.}$$

Osservazione

Ogni diagonale del quadrato divide la figura in due triangoli congruenti, pertanto, un altro metodo per determinare l'area del quadrato è quello di calcolare il doppio dell'area di uno dei triangoli. Ad esempio, si può calcolare l'area del triangolo ABC, quindi, è possibile applicare la seguente formula:

$$\mathbf{A(A;B;C)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.}$$

Sostituendo i valori delle coordinate dei vertici del triangolo ABC si ottiene:

$$\mathbf{A(A;B;C)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}.}$$

Per calcolare il determinate si può procedere nel seguente modo:

$$\mathbf{\begin{matrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -3 & -3 \end{matrix} =}$$

$$\mathbf{=3\cdot 3\cdot 1+3\cdot 1\cdot(-3)+1\cdot(-3)\cdot(-3)-3\cdot(-3)\cdot 1-3\cdot 1\cdot(-3)-1\cdot 3\cdot(-3)=}$$

$$\mathbf{=9-9+9+9+9+9=36.}$$

Pertanto, l'area del triangolo ABC è:

$$\mathbf{A(A;B;C)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=18u^2.}$$

Mentre l'area della figura è:

$$A(A;B;C;D) = 2 \cdot A(A;B;C) = 2 \cdot 18u^2 = 36u^2.$$

Per determinare l'equazione della circonferenza inscritta al quadrato, si osserva che ha il centro coincidente con il baricentro della figura e il diametro uguale al lato del quadrato, quindi indicando con r_{in} il raggio della circonferenza inscritta, ha senso scrivere:

$$r_{in} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2}u = 3u.$$

Pertanto, si applica la seguente formula:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Osservando che $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $r_{in} = 3$, si ottiene:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2,$$

cioè

$$\gamma_{in} : x^2 + y^2 = 9.$$

Per determinare l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrato, si osserva che ha il centro coincidente con il baricentro della figura e il diametro uguale alla diagonale del quadrato, quindi indicando con r_{circo} il raggio della circonferenza circoscritta, ha senso scrivere:

$$r_{circo} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2}u = 3\sqrt{2}u.$$

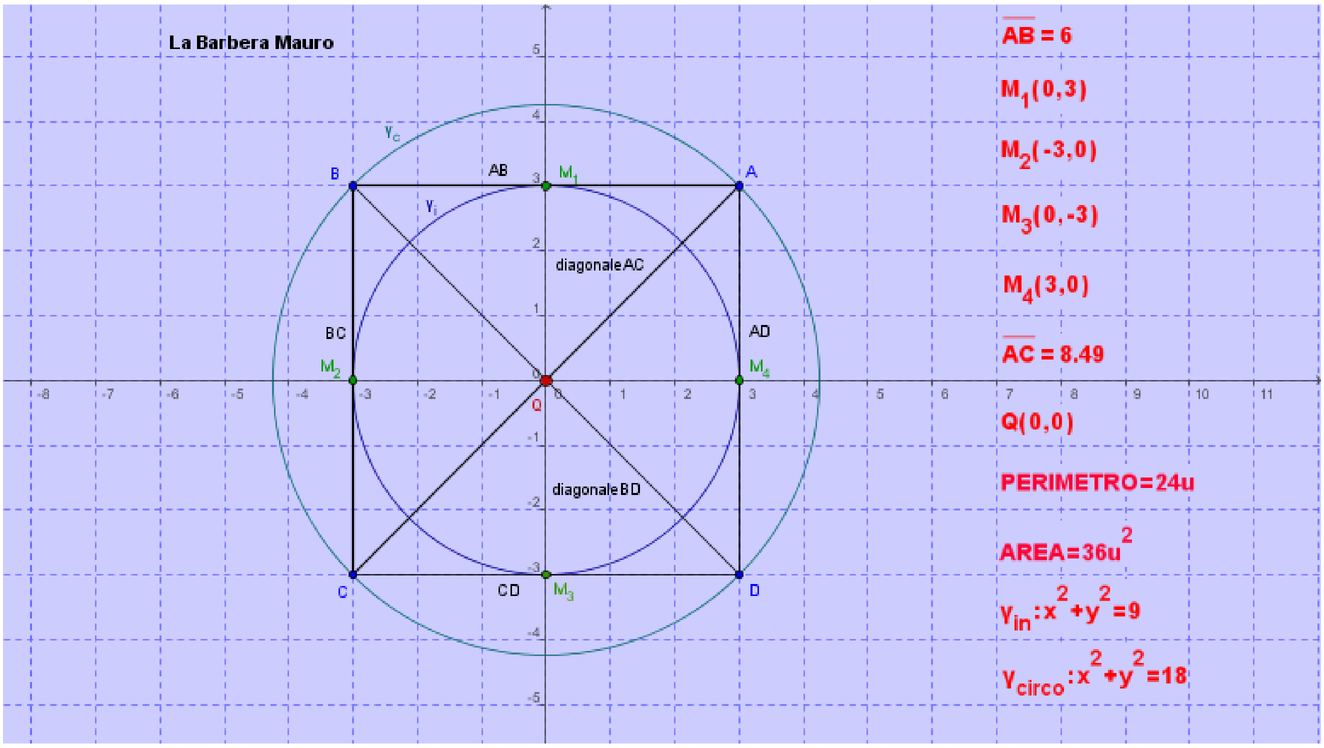
Osservando in questo caso che $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $r_{circo} = 3\sqrt{2}$, si ottiene:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2,$$

cioè

$$\gamma_{circo} : x^2 + y^2 = 18.$$

Graficamente:



[Foglio dinamico]()

[Torna su]()