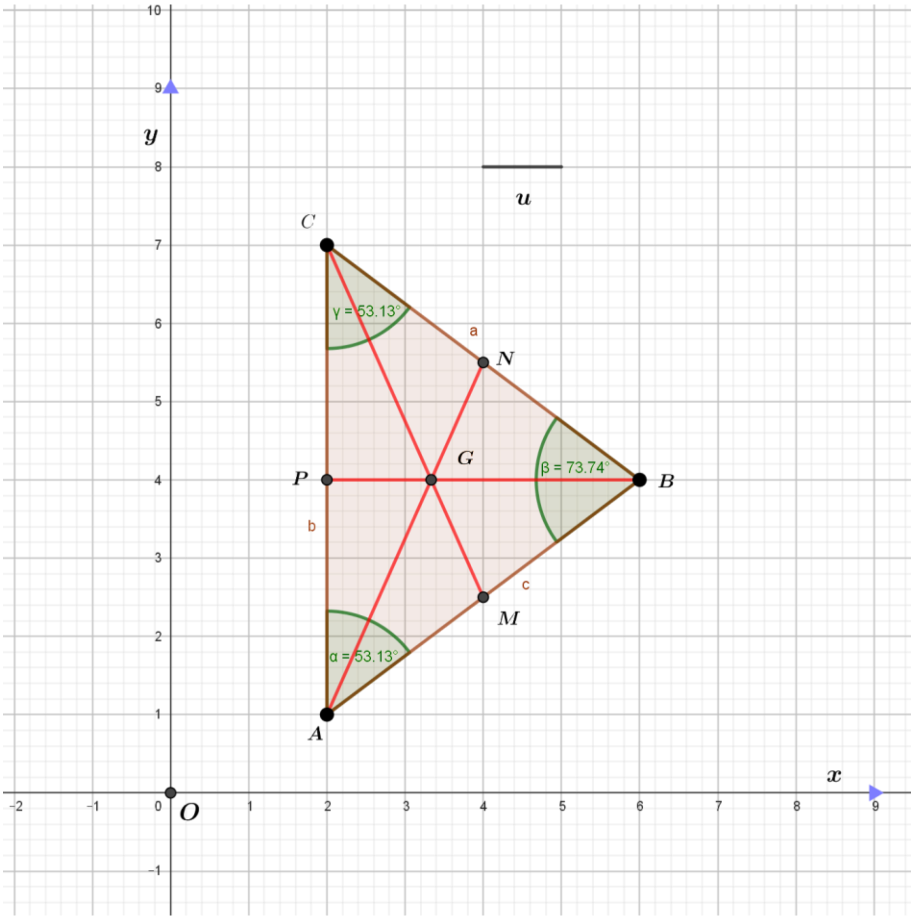
IL TRIANGOLO NEL PIANO CARTESIANO
Problema svolto n°2

Dato il triangolo ABC avente per vertici i punti $A(2;1)$, $B(6;4)$ e $C(2;7)$ determinare le coordinate dei punti medi M, N e P dei lati, le coordinate del baricentro Q , il perimetro e l'area della figura.



Per trovare il punto medio Mdel lato AB si applica la seguente formula:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Quindi sostituendo i valori delle coordinate del punto Msi ottiene

$$M\left(\frac{2+6}{2};\frac{1+4}{2}\right)\to M\left(\frac{8}{2};\frac{5}{2}\right)\to M\left(4;\frac{5}{2}\right)$$

Analogamente si trovano le coordinate degli altri punti medi dei lati, ossia

$$N\left(\frac{6+2}{2};\frac{4+7}{2}\right)\to N\left(\frac{8}{2};\frac{11}{2}\right)\to N\left(4;\frac{11}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{2+2}{2};\frac{1+7}{2}\right)\to P\left(\frac{4}{2};\frac{8}{2}\right)\to P(2;4)$$

Il baricentro G del triangolo ABC è il punto d'intersezione delle sue mediane. Si applica la seguente formula:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Quindi, sostituendo i valori delle coordinate, si ottiene

$$G\left(\frac{2+6+2}{3};\frac{1+4+7}{3}\right)\rightarrow G\left(\frac{10}{3};\frac{12}{3}\right)\rightarrow G\left(\frac{10}{3};4\right)$$

Essendo il perimetro la somma delle misure dei lati, ha senso scrivere

$$2p_{ABC}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$$

Per determinare la misura del lato AB, segmento obliquo, si applica la seguente formula:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

Anche in questo caso, sostituendo i valori delle coordinate dei punti A e B, si ottiene

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-6)^2+(1-4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5u$$

Analogamente si trova la misura del lato BC

$$\overline{BC}=5u$$

Per trovare la misura del lato AC, segmento verticale, si applica la seguente formula:

$$\overline{AC}=|y_A-y_c|$$

$$\overline{AC}=|1-7|=|-6|=6u$$

Quindi, il perimetro è dato da

$$2p_{ABC}=(5+5+6)u=16u$$

Per determinare l'area del triangolo dato è possibile applicare la seguente formula:

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$$

Sostituendo i valori delle coordinate dei vertici del triangolo si ottiene

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 6 & 4 & 1\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix}$$

.

Per calcolare il determinate del terzo ordine si può procedere nel seguente modo:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 1 & 6 & 4\\ 2 & 7 & 1 & 2 & 7\end{matrix}=2\cdot4\cdot1+1\cdot1\cdot2+1\cdot6\cdot7-2\cdot4\cdot1-7\cdot1\cdot2-1\cdot6\cdot1=$$

$$=8+2+42-8-14-6=24$$

Pertanto, l'area della figura è

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times24u^2=12u^2$$

Osservazioni

Per determinare l'area del triangolo ABC si osserva che è un triangolo isoscele essendo i due lati AB e BC congruenti (sono congruenti anche gli angoli $\alpha\ e\ \gamma$), pertanto, la mediana BP è la bisettrice dell'angolo β di vertice B , inoltre è anche l'altezza relativa al lato AC, quindi per calcolare la misura della mediana BP essendo un segmento orizzontale si applica la seguente formula:

$$\overline{BP} = |x_B - x_P|$$

Allora ha senso scrivere

$$\overline{BP} = |6 - 2| = |+4| = 4u$$

Pertanto l'area del triangolo ABC è uguale a

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BP}$$

Cioè

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6u \times 4u = 12u^2$$