SEGMENTO PARABOLICO

DEFINIZIONE

Un segmento parabolico è la parte finita di piano delimitata da una parabola e da una retta che interseca la curva in due punti distinti; se la retta è perpendicolare all'asse della parabola il segmento parabolico si dice retto.

AREA

Per calcolare la misura dell'area $\mathcal{A}_{Sp}$ del segmento parabolico si può applicare la seguente regola

$$\mathcal{A}_{Sp} = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot (x_B - x_A)^3 \; con \; x_B > x_A$$

dove a è il coefficiente del termine quadratico della parabola e x_A e x_B le ascisse degli estremi della corda AB, individuata dai punti di intersezione della retta con la curva.

Oppure

$$\mathcal{A}_{Sp} = \frac{2}{3} \mathcal{A}_R$$

dove $\mathcal{A}_R$ è l'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico S_p

(Teorema di Archimede).

ESERCIZIO SVOLTO

Data la parabola $\gamma: y = x^2 - 8x + 15$ e il suo punto T di ascissa $x_T = 1$, calcolare l'area del rettangolo $TT'QQ'$, dove T' è il simmetrico di T rispetto all'asse di simmetria del grafico, Q e Q' sono le proiezioni rispettivamente di T e T' sulla retta v parallela all'asse delle ascisse passante per V. Calcolare l'area del segmento parabolico S_p inscritto nel rettangolo $TT'QQ'$.

Poiché il punto T appartiene alla curva, sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione della parabola si ottiene $y_T = 8$, quindi $T(1; 8)$.
Si calcolano le coordinate del vertice della parabola

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \rightarrow V(4; -1)$$

e si determina l'equazione dell'asse di simmetria della parabola, cioè

$$a: x = -\frac{b}{2a} \rightarrow a: x = 4$$

Essendo T' il simmetrico di T rispetto all'asse di simmetria della curva, i due punti sono gli estremi del segmento TT' (corda della parabola) che ha il suo punto medio M sull'asse a, pertanto, ha senso scrivere

$$\frac{x_T + x_{T'}}{2} = x_M \rightarrow \frac{1 + x_{T'}}{2} = 4 \rightarrow 1 + x_{T'} = 8 \rightarrow x_{T'} = 7 \rightarrow T'(7; 8)$$

Essendo inoltre il punto Q la proiezione ortogonale di T sulla tangente $v: y = -1$ condotta dal vertice, Q ha la stessa ascissa di T (punti allineati verticalmente) e la stessa ordinata del vertice V, ossia $Q(1; -1)$, nello stesso modo si deducono le coordinate della proiezione Q' di Q, cioè $Q'(7; -1)$.

Per determinare l'area del rettangolo $TT'QQ'$ si calcola sia la misura della base QQ' che dell'altezza TQ

$$\overline{QQ'} = |x_Q - x_{Q'}| \rightarrow \overline{QQ'} = |1 - 7| = 6u$$

$$\overline{TQ} = |y_T - y_Q| \rightarrow \overline{TQ} = |8 - (-1)| = 9u$$

$$\mathcal{A}_R = \overline{QQ'} \times \overline{TQ} \rightarrow \mathcal{A}_R = 6u \times 9u = 54u^2$$

Per determinare l'area del segmento parabolico S_p conoscendo le ascisse degli estremi della corda TT', adattando la prima regola, si ha

$$\mathcal{A}_{Sp} = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot (x_{T'} - x_T)^3 \; con \; x_{T'} > x_T \rightarrow \mathcal{A}_{Sp} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (7 - 1)^3 = \frac{1}{6} \cdot 6^3 = 6^2 = 36u^2$$

Oppure applicando il teorema di Archimede si ottiene

$$\mathcal{A}_{Sp} = \frac{2}{3} \mathcal{A}_R \rightarrow \mathcal{A}_{Sp} = \frac{2}{3} \cdot 54 = 2 \cdot 18 = 36u^2$$