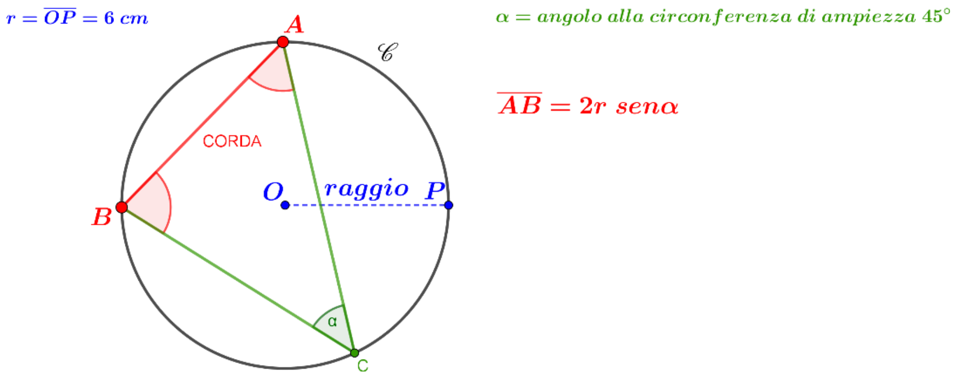
Trigonometria

ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO IL TEOREMA DELLA CORDA

ESERCIZIO N°1

Calcolare la lunghezza della corda AB di una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio 6 cm sottesa da un angolo α di ampiezza 45°.

Teorema della corda: la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno degli archi sottesi della corda.



Applicando il teorema della corda si ha

$$\overline{AB} = 2 \times 6\ sen\ 45°$$

Poiché

$$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

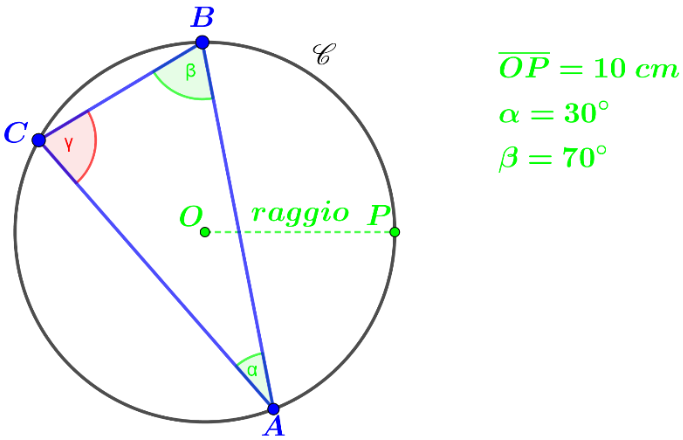
Si ottiene

$$\overline{AB} = 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm\,.$$

ESERCIZIO N°2

Determinare il perimetro e l'area del triangolo acutangolo ABC , inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio 10 cm, sapendo che α e β hanno un'ampiezza rispettivamente di 30° e 70° .

Teorema della corda: la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno degli archi sottesi della corda.



Applicando il teorema della corda al lato BC si ha

$$\overline{BC} = 2r\ sen\ \alpha \rightarrow \overline{BC} = 2 \times 10\ \times sen\ 30° = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10\ cm$$

Analogamente per il lato AC si ottiene

$$\overline{AC} = 2r\ sen\ \beta \rightarrow \overline{AC} = 2 \times 10\ \times sen\ 70° \cong 2 \cdot 10 \cdot 0,94 = 18,8\ cm$$

Poiché $\gamma = 180° - (30° + 70°) = 80°$

allora ha senso scrivere

$$\overline{AB} = 2r\ sen\ \gamma \rightarrow \overline{AB} = 2 \times 10\ \times sen\ 80° \cong 2 \cdot 10 \cdot 0,98 = 19,6\ cm$$

Pertanto, il perimetro $2p$ del triangolo ABC è

$$2p_{ABC} = (10 + 18,8 + 19,6)\ cm = 48,4\ cm$$

Per calcolore l'area $\mathcal{A}$ del triangolo ABC si può applicare la seguente regola

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}\ \times sen\ \alpha$$

Sostituendo i valori già calcolati si ottiene

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 19,6 \times 18,8 \times \frac{1}{2}\ cm^2 = 92,12\ cm^2$$

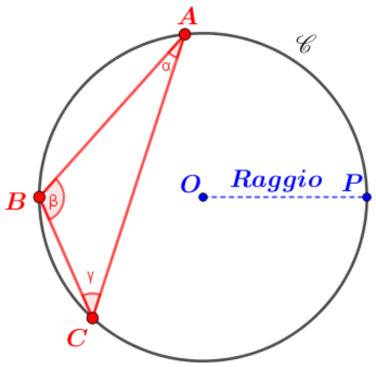
ESERCIZIO N°3

Determinare il perimetro e l'area del triangolo ABC, ottusangolo in β, inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio 12 cm, sapendo che i lati AB e BC misurano rispettivamente 12 cm e 16,8 cm .

ESERCIZIO N°4

Dato il triangolo ABC , inscritto in una circonferenza di centro O e raggio R, determinare la misura del lato AC, sapendo che i lati AB e BC misurano rispettivamente $\frac{4}{3}R$ e $\frac{4}{5}R$.

Teorema della corda: la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno degli archi sottesi della corda.



$R = raggio\ della\ circonferenza\ circoscritta$

$\overline{AB} = \frac{4}{3}R$

$\overline{BC} = \frac{4}{5}R$

Applicando *il teorema della corda* si ha

$$\overline{AB} = 2R\ sen\ \gamma \rightarrow \frac{4}{3}R = 2R\ sen\ \gamma \rightarrow sen\ \gamma = \frac{2}{3}$$

e

$$\overline{BC} = 2R\ sen\ \alpha \rightarrow \frac{4}{5}R = 2R\ sen\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \frac{2}{5}$$

Si calcolano i valori delle *cofunzioni*

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - sen^2\gamma} \ \text{ e } \ \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Escudendo le soluzioni negative si ottiene

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{25-4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Sapendo che

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \rightarrow \beta = 180° - (\alpha + \gamma)$$

Applicando la regola degli *angoli associati*

$$sen\ \beta = sen[180° - (\alpha + \gamma)] = sen\ (\alpha + \gamma)$$

Applicando la formula dell'*addizione*

$$sen\ (\alpha + \gamma) = sen\ \alpha\ cos\ \gamma + cos\ \alpha\ sen\ \gamma$$

Ossia sostituendo i valori noti si ha

$$sen\ (\alpha + \gamma) = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{21}}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{21})}{15} = sen\ \beta$$

Pertanto, applicando il teorema della corda al lato AC si ottiene

$$\overline{AC} = 2R\ sen\ \beta = 2R \times \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{21})}{15} = \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{21})}{15} R$$