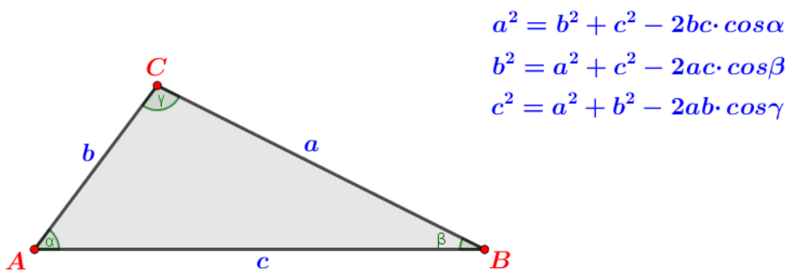
Trigonometria

TEOREMA DEL COSENO (O DI CARNOT)

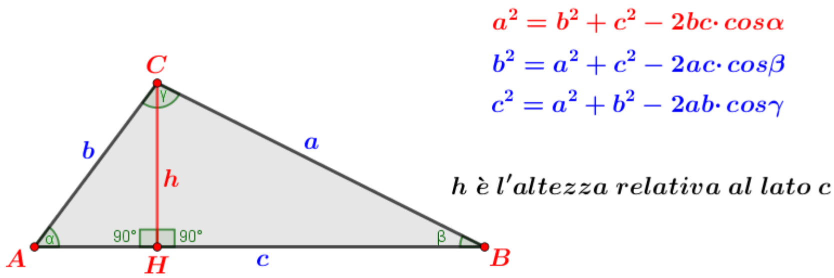
Enunciato

In un triangolo qualunque il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati moltiplicato per il coseno dell'angolo che essi formano.



Dimostrazione

Si vuole dimostrare la prima relazione, pertanto, si traccia l'altezza h relativa al lato c e indicato con H il piede dell'altezza, si nota in figura, che il triangolo ABC è diviso dall'altezza h in due triangoli rettangoli AHC e BCH



Osservando il triangolo rettangolo AHC, per il primo teorema sui triangoli rettangoli, il cateto h è dato dalla misura dell'ipotenusa b per il seno dell'angolo opposto, ossia

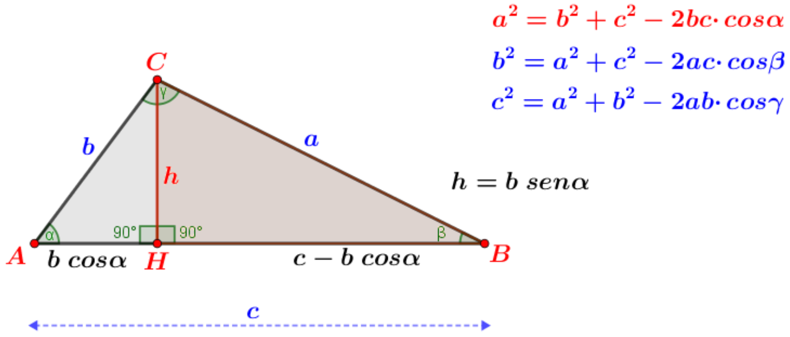
$$h = b \; sen \; \alpha$$

Inoltre, il cateto AH del triangolo rettangolo AHC è uguale alla misura dell'ipotenusa b per il coseno dell'angolo α, ossia

$$\overline{AH} = b\cos\alpha$$

Pertanto, si può ricavare la misura del cateto HB del triangolo rettangolo BCH, cioè

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = c - b\cos\alpha$$



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH, ha senso scrivere

$$a^2 = h^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$

Sostituendo il valore di h e svolgendo il quadrato di binomio si ottiene

$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha$$

Mettendo in evidenza il fattore comune b^2 si ha

$$a^2 = b^2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Pertanto, si è dimostrato che

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

N.B.

- **Costruendo le altre due altezze del triangolo ABC si dimostrano analogamente le altre due relazioni del teorema di Carnot.**

- **Lazare Nicolas Marguérite Carnot matematico francese del XVIII secolo, autore del *teorema del coseno*, che può essere considerato una generalizzazione del *teorema di Pitagora* applicato al caso di triangoli non rettangoli.**