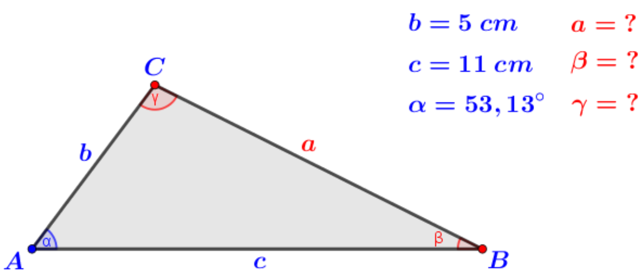
TRIGONOMETRIA

ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO IL TEOREMA DEL COSENO (O DI CARNOT)

ESERCIZIO N°1

Calcolare gli elementi rimanenti del triangolo ABC, sapendo che $b = 5cm$, $c = 11cm$ e $\alpha = 53,15°$.



Si applica il teorema di Carnot per calcolare la misura del lato a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha$$

cioè

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha} = \sqrt{5^2 + 11^2 - 2 \times 5 \times 11 \times cos\ 53,13°}$$

ossia

$$a \cong \sqrt{25 + 121 - 10 \times 11 \times 0,6} = \sqrt{25 + 121 - 66} = \sqrt{80} \cong 8,9442\ cm$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo β si osserva che

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \beta$$

applicando la seguente formula inversa

$$cos\ \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cong \frac{80 + 121 - 25}{2 \times 8,9442 \times 11} = \frac{176}{196,7724} \cong 0,9844$$

Cioè

$$cos\ \beta = 0,9844 \rightarrow \beta = arcos\ 0,9844 \cong 26,57°$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo γ o si applica la seguente formula inversa

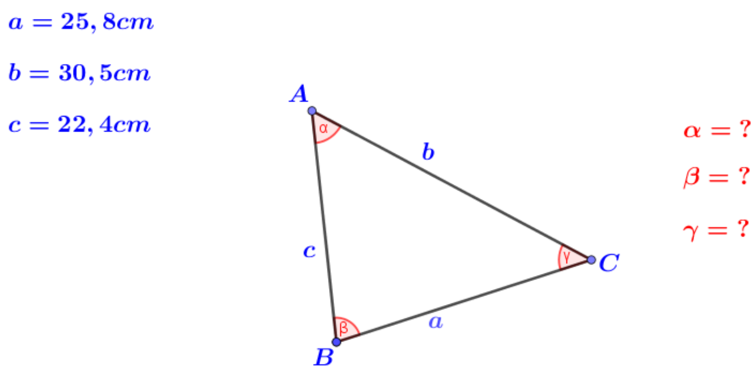
$$cos\ \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Oppure più velocemente

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 53,13° - 26,57° = 100,3°$$

ESERCIZIO N°2

Determinare le ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC, sapendo che i lati misurano $a = 25,8\ cm$, $b = 30,5\ cm$ e $c = 22,4\ cm$.



Per calcolare la misura dell'ampiezza dell'angolo α si applica la seguente formula inversa del teorema di Carnot

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sostituendo i valori noti si ottiene

$$\cos\alpha = \frac{(30,5)^2 + (22,4)^2 - (25,8)^2}{2 \times 30,5 \times 22,4} = \frac{766,37}{1366,4} \cong 0,5608$$

Pertanto, si ha

$$\alpha = \arccos 0,5608 \cong 55,88°$$

Analogamente si trova che

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{237,15}{1155,84} \cong 0,2051$$

Ossia

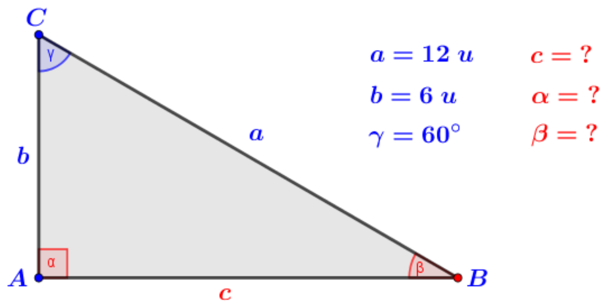
$$\beta = \arccos 0,2051 \cong 78,16°$$

Infine

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 55,88° - 78,16° = 45,96°$$

ESERCIZIO N°3

Calcolare gli elementi rimanenti del triangolo ABC, sapendo che $a = 12\ u$, $b = \ 6\ u$ e $\gamma = \frac{\pi}{6}$.



Si applica il teorema di Carnot per calcolare la misura del lato c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \gamma$$

cioè

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \gamma} = \sqrt{12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times cos\ 60°}$$

ossia

$$c = \sqrt{144 + 36 - 2 \times 12 \times 6 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{180 - 72} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}\ u$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo α si osserva che

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha$$

applicando la seguente formula inversa

$$cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cong \frac{36 + 108 - 144}{2 \times 6 \times 6\sqrt{3}} = \frac{144 - 144}{72\sqrt{3}} = 0$$

Cioè

$$cos\ \alpha = 0 \rightarrow \alpha = arcos\ 0 = 90° \text{ (il triangolo } ABC \text{ è retto in } A\text{)}$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo β o si applica la seguente formula inversa

$$cos\ \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{144 + 108 - 36}{2 \times 12 \times 6\sqrt{3}} = \frac{216}{144\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 30°$$

Oppure più velocemente

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 90° - 60° = 30°$$

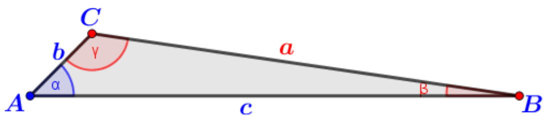
ESERCIZIO N°4

Calcolare gli elementi rimanenti del triangolo ABC, sapendo che $b = \sqrt{2}\,u$, $c = 10\,u$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$b = \sqrt{2}\,u$ $\quad a = ?$

$c = 10\,u$ $\quad \beta = ?$

$\alpha = 45°$ $\quad \gamma = ?$



Si applica il teorema di Carnot per calcolare la misura del lato a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

cioè

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 10^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 10 \times \cos 45°}$$

ossia

$$a = \sqrt{2 + 100 - 2 \times \sqrt{2} \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{102 - 20} = \sqrt{82}\,u$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo β si applica la seguente formula inversa

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{82 + 100 - 2}{2 \times \sqrt{82} \times 10} = \frac{180}{20\sqrt{82}} = \frac{9}{\sqrt{82}} = \frac{9\sqrt{82}}{82} \cong 0,9939$$

Ossia

$$\beta = \arccos 0,9939 \cong 6,33°$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo γ o si applica la seguente formula inversa

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Oppure più velocemente

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 6,33° = 128,67°$$