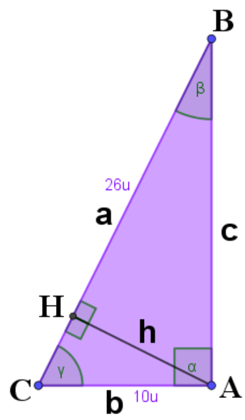
PROBLEMI DI TRIGONOMETRIA "AREA DEL TRIANGOLO"

1 Sapendo che l'ipotenusa a e il cateto b misurano rispettivamente $26u$ e $10u$ determinare la misura del cateto c e l'ampiezza degli angoli β e γ. Inoltre, calcolare l'altezza h relativa all'ipotenusa, il perimetro e l'area della figura.

SVOLGIMENTO



Applicando il teorema di Pitagora si ha

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24u$$

Applicando il secondo teorema sui triangoli rettangoli si ha

$$b = c\, tg\, \beta \rightarrow tg\, \beta = \frac{10}{24} \rightarrow tg\, \beta = \frac{5}{12} \rightarrow \beta = arctg\, \frac{5}{12} = \sim 22{,}62°$$

Inoltre, si deduce che

$$\gamma = 90° - \beta = 90° - 22{,}62° = 67{,}38°$$

Per determinare l'altezza relativa all'ipotenusa h si applica la regola

$$h = \frac{b \times c}{a}$$

Pertanto,

$$h = \frac{10 \times 24}{26} = \frac{120}{13} u$$

Calcolo del perimetro della figura

$$2p = a + b + c = 26u + 10u + 24u = 60u$$

Calcolo dell'area della figura

$$\mathcal{A} = \frac{a \times h}{2} = \frac{1}{2} \times 26 \times \frac{120}{13} = 120u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{bc\ sen\ \alpha}{2} = \frac{1}{2} \times 10 \times 24 \times sen\ 90° = 120u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ab\ sen\ \gamma}{2} = \frac{1}{2} \times 26 \times 10 \times sen\ 67{,}38° = 120u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ac\ sen\ \beta}{2} = \frac{1}{2} \times 26 \times 24 \times sen\ 22{,}62° = 120u^2$$

Approfondimento

Per determinare l'area del triangolo si può applicare anche la formula di Erone, ossia

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \ dove\ p\ indica\ il\ semiperimetro$$

Essendo

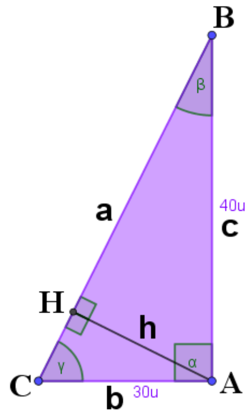
$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} \times 60 = 30u$$

si ha

$$\mathcal{A} = \sqrt{30(30-26)(30-10)(30-24)} = \sqrt{30 \times 4 \times 20 \times 6} = \sqrt{14.400} = 120u^2$$

2 Sapendo che il cateto b e il cateto c misurano rispettivamente $30u$ e $40u$ determinare la misura dell'ipotenusa a e l'ampiezza degli angoli β e γ. Inoltre, calcolare l'altezza h relativa all'ipotenusa, il perimetro e l'area della figura.

SVOLGIMENTO



Applicando il teorema di Pitagora si ha

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{900 + 1.600} = \sqrt{2.500} = 50u$$

Applicando il secondo teorema sui triangoli rettangoli si ha

$$b = c\ tg\ \beta \rightarrow tg\ \beta = \frac{b}{c} \rightarrow tg\ \beta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \rightarrow \beta = arctg\ \frac{3}{4} \sim 36{,}87°$$

Inoltre, si deduce che

$$\gamma = 90° - \beta = 90° - 36{,}87° = 53{,}13°$$

Per determinare l'altezza relativa all'ipotenusa h si applica la regola

$$h = \frac{b \times c}{a}$$

Pertanto,

$$h = \frac{30 \times 40}{50} = 24u$$

Calcolo del perimetro della figura

$$2p = a + b + c = 50u + 30u + 40u = 120u$$

Calcolo dell'area della figura

$$\mathcal{A} = \frac{a \times h}{2} = \frac{1}{2} \times 50 \times 24 = 600u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{bc\ sen\ \alpha}{2} = \frac{1}{2} \times 30 \times 40 \times sen\ 90° = 600u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ab\ sen\ \gamma}{2} = \frac{1}{2} \times 50 \times 30 \times sen\ 53,13° = 600u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ac\ sen\ \beta}{2} = \frac{1}{2} \times 50 \times 40 \times sen\ 36,87° = 600u^2$$

Approfondimento

Per determinare l'area del triangolo si può applicare anche la formula di Erone, ossia

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad dove\ p\ indica\ il\ semiperimetro$$

Essendo

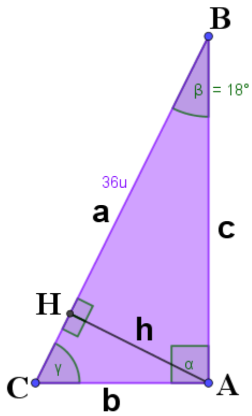
$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} \times 120 = 60u$$

si ha

$$\mathcal{A} = \sqrt{60(60-50)(60-30)(60-40)} = \sqrt{60 \times 10 \times 30 \times 20} = \sqrt{360.000} = 600u^2$$

3 Sapendo che l'ipotenusa a misura $36u$ e l'ampiezza β è uguale a 18° determinare l'ampiezza dell'angolo γ e le misure dei cateti b e c. Inoltre, calcolare l'altezza h relativa all'ipotenusa, il perimetro e l'area della figura.

SVOLGIMENTO



Essendo β e γ angoli complementari si ottiene

$$\gamma = 90° - 18° = 72°$$

Applicando il primo teorema sui triangoli rettangoli si ha

$$b = a\,sen\,\beta \rightarrow b = 36\,sen\,\beta = 36\,sen\,18° = \sim 11,12u$$

Inoltre, si deduce che

$$c = a\,sen\,\gamma \rightarrow c = 36\,sen\,\gamma = 36\,sen\,72° = \sim 34,23u$$

Per determinare l'altezza relativa all'ipotenusa h si applica la regola

$$h = \frac{b \times c}{a}$$

Pertanto,

$$h = \frac{11,12 \times 34,23}{36} = \sim 10,58u$$

Calcolo del perimetro della figura

$$2p = a + b + c = 36u + 11,12u + 34,23u = 81,35u$$

Calcolo dell'area della figura

$$\mathcal{A}=\frac{a\times h}{2}=\frac{1}{2}\times 36\times 10,58=\sim 190u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A}=\frac{bc\ sen\ \alpha}{2}=\frac{1}{2}\times 11,12\times 34,23\times sen\ 90°=\sim 190u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A}=\frac{ab\ sen\ \gamma}{2}=\frac{1}{2}\times 36\times 11,12\times sen\ 72°=\sim 190u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A}=\frac{ac\ sen\ \beta}{2}=\frac{1}{2}\times 36\times 34,23\times sen\ 18°=\sim 190u^2$$

Approfondimento

Per determinare l'area del triangolo si può applicare anche la formula di Erone, ossia

$$\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad dove\ p\ indica\ il\ semiperimetro$$

Essendo

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}\times 81,35=40,68u$$

si ha

$$\mathcal{A}=\sqrt{40,68(40,68-36)(40,68-11,12)(40,68-34,23)}$$

cioè

$$\mathcal{A}=\sqrt{40,68\times 4,68\times 29,56\times 6,45}=\sqrt{36.298,69}=\sim 190u^2$$

Osservazioni

Si può dimostrare che

$$sen\ 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=cos\ 72°$$

e

$$sen\ 72°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=cos\ 18°$$

Pertanto, i cateti misurano

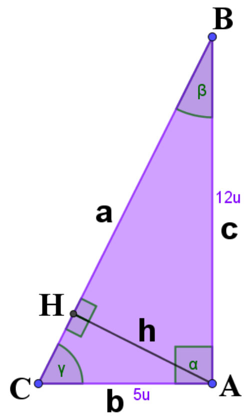
$$b=36\ sen\ 18°=36\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=9\left(\sqrt{5}-1\right)u=\sim 11,12u$$

e

$$c=36\ sen\ 72°=36\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=9\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,u=\sim 34,23u$$

4 Sapendo che il cateto b e il cateto c misurano rispettivamente $5u$ e $12u$ determinare la misura dell'ipotenusa a e l'ampiezza degli angoli β e γ. Inoltre, calcolare l'altezza h relativa all'ipotenusa, il perimetro e l'area della figura.

SVOLGIMENTO



Applicando il teorema di Pitagora si ha

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13u$$

Applicando il secondo teorema sui triangoli rettangoli si ha

$$b = c\ tg\ \beta \rightarrow tg\ \beta = \frac{b}{c} \rightarrow tg\ \beta = \frac{5}{12} \rightarrow \beta = arctg\ \frac{5}{12} = \sim 22,62°$$

Inoltre, si deduce che

$$\gamma = 90° - \beta = 90° - 22,62° = 67,38°$$

Per determinare l'altezza relativa all'ipotenusa h si applica la regola

$$h = \frac{b \times c}{a}$$

Pertanto,

$$h = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}u$$

Calcolo del perimetro della figura

$$2p = a + b + c = 13u + 5u + 12u = 30u$$

Calcolo dell'area della figura

$$\mathcal{A} = \frac{a \times h}{2} = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{60}{13} = 30u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{bc\ sen\ \alpha}{2} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times sen\ 90° = 30u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ab\ sen\ \gamma}{2} = \frac{1}{2} \times 13 \times 5 \times sen\ 67{,}38° = 30u^2$$

Oppure

$$\mathcal{A} = \frac{ac\ sen\ \beta}{2} = \frac{1}{2} \times 13 \times 12 \times sen\ 22{,}62° = 30u^2$$

Approfondimento

Per determinare l'area del triangolo si può applicare anche la formula di Erone, ossia

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad dove\ p\ indica\ il\ semiperimetro$$

Essendo

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2} \times 30 = 15u$$

si ha

$$\mathcal{A} = \sqrt{15(15-13)(15-5)(15-12)} = \sqrt{15 \times 2 \times 10 \times 3} = \sqrt{900} = 30u^2$$