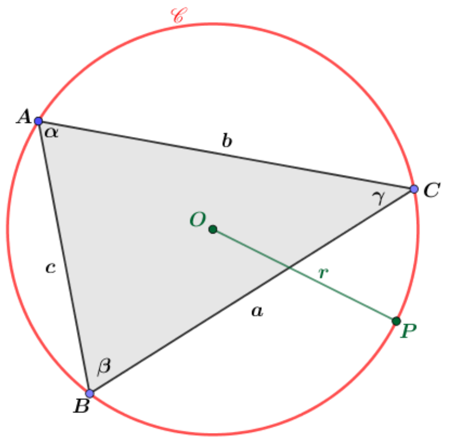
Trigonometria

IL TEOREMA DEI SENI

Enunciato

In un triangolo qualunque il rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante ed è uguale al doppio della lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta.

Si disegna il triangolo ABC inscritto nella circonferenza $\mathscr{C}$



Pertanto, ha senso scrivere

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r$$

Dimostrazione

Si osserva che ogni lato del triangolo è una corda della circonferenza circoscritta, quindi applicando il teorema della corda **(la misura di una corda in una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno degli archi sottesi della corda),** pertanto si ha

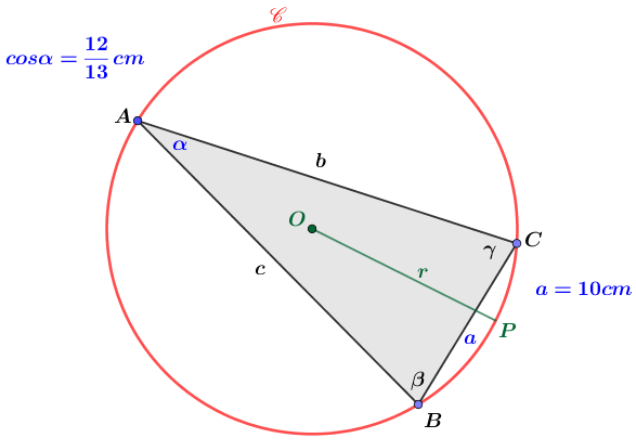
$$a = 2rsen\alpha \ , \qquad b = 2rsen\beta \ , \qquad c = 2rsen\gamma$$

Se da ogni relazione suddetta si ricava la misura del diametro si dimostra il teorema dei seni.

$$\frac{a}{sen\alpha} = 2r \ , \qquad \frac{b}{sen\beta} = 2r \ , \qquad \frac{c}{sen\gamma} = 2r$$

<u>Esercizio</u>

In un triangolo un lato misura 10cm ed il coseno dell'angolo acuto ad esso opposto misura 12/13 cm , determinare il raggio della circonferenza circoscritta.



Sapendo che

$$cos\alpha = \frac{12}{13}$$

Si calcola

$$cos^2\alpha = \frac{144}{169}$$

E applicando la prima relazione fondamentale della goniometria

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Si calcola il valore del seno dell'angolo

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169}$$

Pertanto

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

Escludendo il valore negativo si ottiene

$$sen\alpha = \frac{5}{13}$$

Applicando il teorema dei seni ha senso scrivere

$$\frac{a}{sen\alpha} = 2r \rightarrow r = \frac{a}{2sen\alpha}$$

Sostituendo i valori si ha

$$r = \frac{10}{2} \times \frac{13}{5} = 13cm$$