Home page

Analisi
Classe quinta

STUDIO DELLA FUNZIONE BIQUADRATICA

$$\mathbf{y = x^4 - 2x^2}$$

1) **Classificazione e Campo di esistenza** :

Funzione algebrica razionale intera di quarto grado, C.E.: $\forall x \in \Re$, oppure $]-\infty;+\infty[$.

2) **Simmetrie** :

Si pone $f(x) = x^4 - 2x^2$ allora: $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2$ ossia: $f(-x) = x^4 - 2x^2$, quindi la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, perché: $f(x) = f(-x)$ (funzione pari).

3) **Studio del segno** :

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè:
$x^4 - 2x^2 \geq 0$ cioè: $x^2(x^2 - 2) \geq 0$, pertanto, si può scrivere:
1 fattore: $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \Re$,
2 fattore: $x^2 - 2 \geq 0$ per $x \leq -\sqrt{2} \wedge x \geq \sqrt{2}$.
Quindi per $x < -\sqrt{2}$ e per $x > \sqrt{2}$ la funzione è positiva, mentre per $-\sqrt{2} < x < 0$ e per $0 < x < \sqrt{2}$ la funzione è negativa, infine per $x = \pm\sqrt{2}$ e per $x = 0$ la funzione è nulla.

4) **Intersezioni con gli assi cartesiani** :

$\cap_y \begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ x = 0 \end{cases}$ ossia passa per l'origine degli assi cartesiani.

$\cap_x \begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ ossia interseca l'asse delle x, oltre nel punto di origine, anche nei punti $A(-\sqrt{2};0)$ e $B(\sqrt{2};0)$.

5) **Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo** :

$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 2x^2) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 2x^2) = +\infty$.

6) **Crescenza e decrescenza** :

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè: $y' = 4x^3 - 4x$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè: $4x^3 - 4x \geq 0$, ossia: $4x(x^2 - 1) \geq 0$, pertanto, si ottiene:
1 fattore: $4x \geq 0$ cioè $x \geq 0$,
2 fattore: $x^2 - 1 \geq 0$ cioè $x \leq -1 \wedge x \geq 1$.
Quindi, la funzione data è decrescente per $x < -1$ e per $0 < x < 1$, mentre è crescente per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$. Infine è costante per $x = \pm 1$ e per $x = 0$.

7) **Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale** :

La funzione data ha nei punti $C(-1;-1)$ e $D(1;-1)$ due minimi relativi, mentre ha un massimo relativo nell'origine degli assi cartesiani.

8) **Concavità e convessità** :

Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè: $\mathbf{y'' = 12x^2 - 4}$.

Si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{12x^2 - 4 \geq 0}$, pertanto, si ottiene $\mathbf{x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}}$ e $\mathbf{x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Quindi la funzione è concava verso l'alto per $\mathbf{x < -\frac{\sqrt{3}}{3}}$ e $\mathbf{x > \frac{\sqrt{3}}{3}}$, mentre è concava verso il basso per $\mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

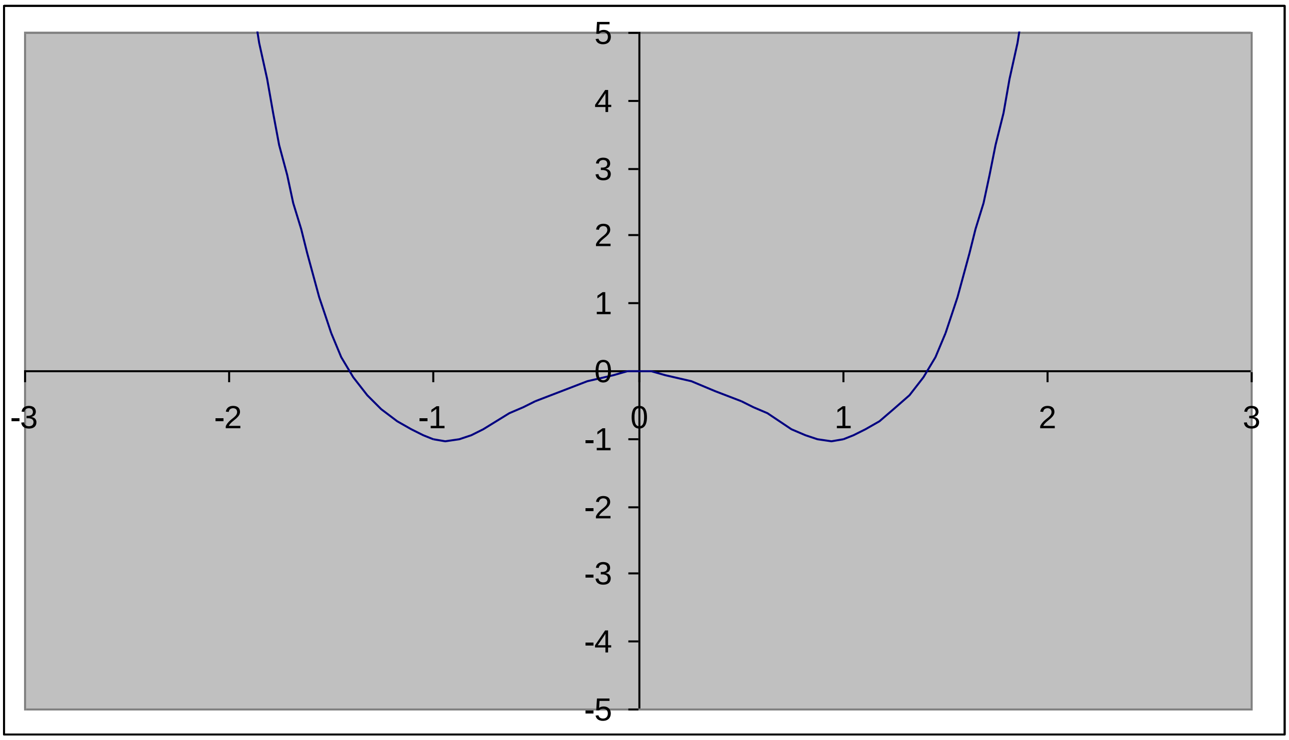
Inoltre, la derivata seconda è nulla per $\mathbf{x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

9) **Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua** :

La funzione data presenta due punti d'inflessione, e precisamente:

$\mathbf{E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{5}{9}\right)}$, punto di flesso a tangente obliqua ascendente e $\mathbf{F\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{5}{9}\right)}$, punto di flesso a tangente obliqua discendente.

10) **Grafico** :



Torna su