STUDIO DELLA FUNZIONE CUBICA

$$y = x^3 - 6x^2$$

1) Classificazione e Campo di esistenza

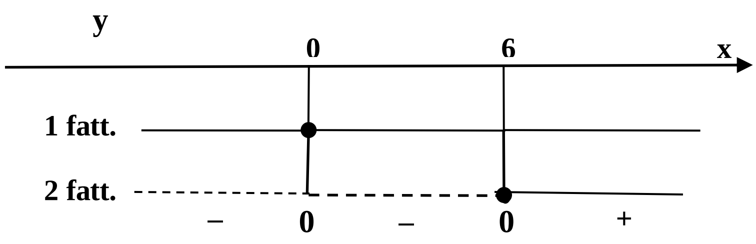
Funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica, la sua forma implicita è $x^3 - 6x^2 - y = 0$. C. E.: $\forall x \in \Re$ (simbologia insiemistica) o $]-\infty ; +\infty[$ (simbologia topologica).

2) Simmetrie

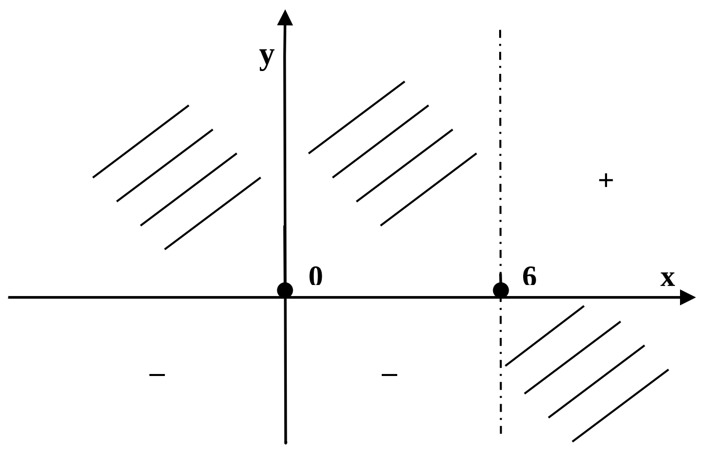
Si pone $f(x) = x^3 - 6x^2$ allora $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2$ ossia $f(-x) = -x^3 - 6x^2$, quindi la funzione non è simmetrica sia rispetto all'asse delle ordinate (pari) che rispetto all'origine degli assi cartesiani (dispari), perché: $f(x) \neq \pm f(-x)$.

3) Studio del segno

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè:
$x^3 - 6x^2 \geq 0$ cioè: $x^2(x-6) \geq 0$, pertanto, si può scrivere:
1 fattore: $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \Re$ (la disequazione è sempre verificata),
2 fattore: $x - 6 \geq 0$ cioè per $x \geq 6$.



Quindi, per $x > 6$ la funzione è positiva, mentre per $x < 0$ e per $0 < x < 6$ la funzione è negativa. Infine, per $x = 0$ e per $x = 6$ la funzione è nulla.



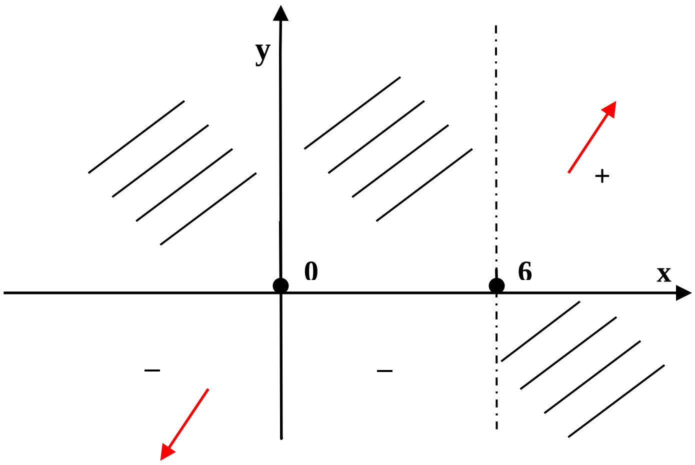
4) Intersezioni con gli assi cartesiani

$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 6x^2 \\ x = 0 \end{cases}$ ossia passa per l'origine degli assi cartesiani.

$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 6x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ interseca l'asse delle x, oltre nel punto $\mathbf{O(0;0)}$, anche nel punto $\mathbf{A(6;0)}$.

5) Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio

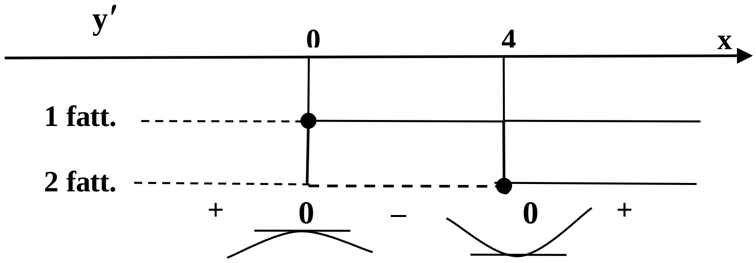
Poiché l'intervallo di esistenza della funzione è $]-\infty\ ;\ +\infty[$, si calcolano i limiti della funzione negli estremi dell'intervallo del campo di esistenza. Pertanto, per $x \to +\infty$ si ha $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 6x^2) = +\infty - \infty$. Il limite dà una forma indeterminata, per eliminare la forma di indecisione si mette in evidenza la $\mathbf{x}$ di grado massimo, cioè $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \underbrace{\frac{6}{x}}_{0}\right) = +\infty$, mentre per $x \to -\infty$ si ottiene che $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2) = -\infty - \infty = -\infty$.



6) Crescenza e/o decrescenza

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè: $y' = 3x^2 - 12x$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè: $3x^2 - 12x \geq 0$, ossia: $3x(x-4) \geq 0$, pertanto, si ottiene:

1 fattore: $3x \geq 0$ cioè $x \geq 0$,
2 fattore: $x - 4 \geq 0$ cioè $x \geq 4$.



Quindi, la derivata prima è negativa per $\mathbf{0 < x < 4}$, pertanto, la funzione data è decrescente per $\mathbf{0 < x < 4}$, mentre negli intervalli dove la derivata prima è positiva, cioè per $\mathbf{x < 0}$ e per $\mathbf{x > 4}$, la cubica è crescente. Infine, nei punti dove la derivata prima è nulla si ha che la funzione data è costante, ossia per $\mathbf{x = 4}$ e per $\mathbf{x = 0}$.

7) Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale

Nell'intorno del valore **0** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni:

+	**0**	–

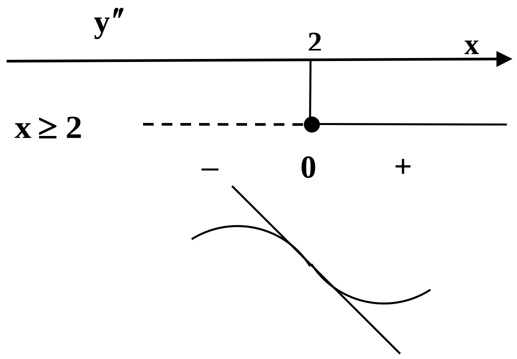
pertanto $\mathbf{0}$ è un massimante, essendo $\mathbf{f(0) = 0}$ la funzione data ha nel punto $\mathbf{O(0;0)}$ un punto di massimo relativo, mentre nell'intorno del valore **4** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni:

–	**0**	+

pertanto **4** è un minimante, essendo $\mathbf{f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 = 64 - 96 = -32}$ la funzione data ha nel punto $\mathbf{B(4;-32)}$ un minimo relativo.

8) Concavità e/o convessità

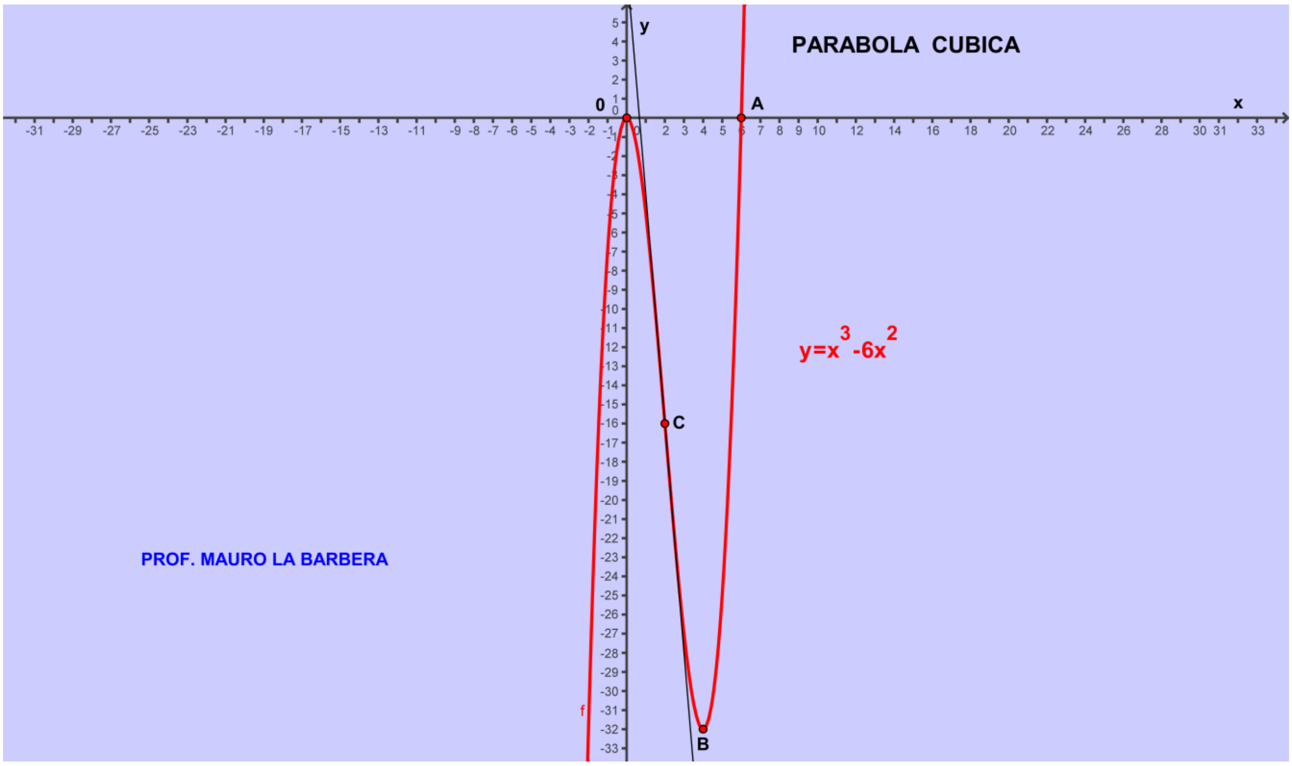
Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè: $\mathbf{y'' = 6x - 12}$, si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{6x - 12 \geq 0}$, pertanto si ottiene $\mathbf{x \geq 2}$. Quindi la funzione data è concava verso l'alto nell'intervallo dove la derivata seconda è positiva, ossia per $\mathbf{x > 2}$, mentre è concava verso il basso nell'intervallo dove la derivata seconda è negativa, cioè per $\mathbf{x < 2}$, inoltre la derivata seconda è nulla per $\mathbf{x = 2}$.



9) Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua

Poiché $\mathbf{f(x_0) = f(2) = 8 - 24 = -16}$ e $\mathbf{f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 = -12 < 0}$ (coefficiente angolare negativo della retta tangente), la funzione data presenta in $\mathbf{C(2;-16)}$ un punto di flesso a tangente obliqua discendente. Per determinare l'equazione della retta tangente in $\mathbf{C}$ si applica la seguente equazione: $\mathbf{y - f(x_0) = m(x - x_0)}$ dove $\mathbf{m = f'(x_0)}$. Pertanto, si ottiene $\mathbf{y + 16 = -12(x - 2)}$ cioè $\mathbf{y + 16 = -12x + 24 \to y = -12x + 24 - 16 \to y = -12x + 8}$.

10) <u>Grafico</u>



[Torna su](#)