STUDIO DELLA FUNZIONE CUBICA

$$y = x^3$$

1) Classificazione e Dominio

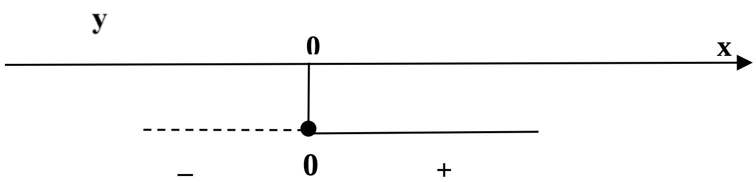
Funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica, scritta informa esplicita, mentre la sua forma implicita è $\boldsymbol{x^3 - y = 0}$. Il dominio della funzione o campo di esistenza è tutto l'asse reale, cioè C.E.:$\forall \mathbf{x} \in \Re$ (simbologia insiemistica) o $\mathbf{]-\infty\ ;\ +\infty[}$ (simbologia topologica).

2) Simmetrie

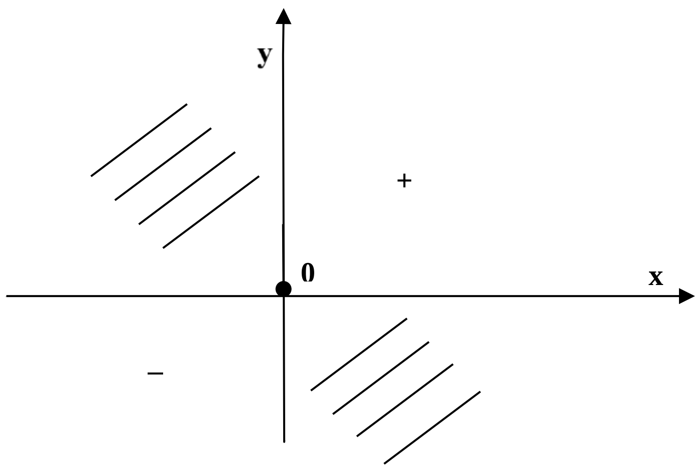
Si pone $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ e si calcola $\boldsymbol{f(-x)}$, cioè sostituendo al posto di $\boldsymbol{x}$ il suo opposto, si ha $\boldsymbol{f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)}$, quindi la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, ossia è DISPARI. Se nell'equazione della funzione si sostituiscono, ad esempio, due valori opposti della variabile $\boldsymbol{x}$, si hanno due immagini distinte ed opposte, infatti $A(1\,;1)\ e\ A'(-1\,;-1)$ sono punti del grafico simmetrici.

3) Studio del segno

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè: $\boldsymbol{x^3 \geq 0}$ cioè: $\boldsymbol{x \geq 0}$, pertanto, si può rappresentare l'insieme delle soluzioni della disequazione:



Quindi nell'intervallo aperto $]-\infty\,;\mathbf{0}[$ la funzione è negativa, mentre nell'intervallo aperto $]\mathbf{0}\,;+\infty[$ la funzione è positiva. Infine, per $\mathbf{x = 0}$ la funzione è nulla.



4) <u>Intersezioni con gli assi cartesiani</u>

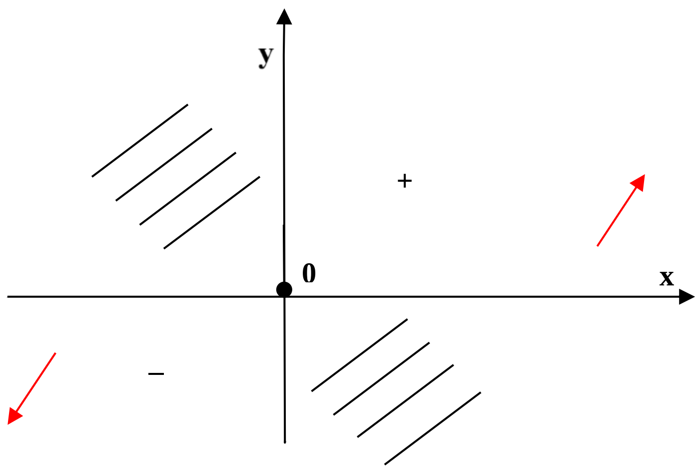
$$\cap_y \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

$$\cap_x \begin{cases} y = x^3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0$$

Quindi la curva passa per l'origine degli assi cartesiani.

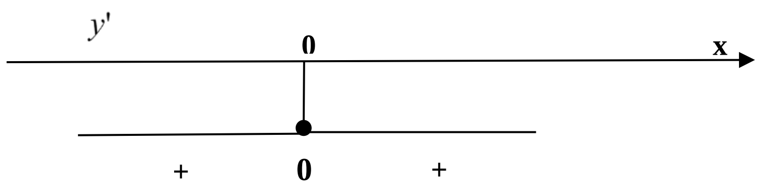
5) <u>Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio</u>

Poiché l'intervallo di esistenza della funzione è $\mathbf{]-\infty\ ;\ +\infty[}$, si calcolano i limiti della funzione negli estremi dell'intervallo del dominio. Pertanto, per $\mathbf{x \rightarrow +\infty}$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{x^3} = (+\infty)^3 = +\infty$, mentre per $\mathbf{x \rightarrow -\infty}$ si ottiene che $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{x^3} = (-\infty)^3 = -\infty$.



6) <u>Crescenza e/o decrescenza</u>

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè $f'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{3x^2}$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè $\boldsymbol{3x^2} \geq \mathbf{0}$, poiché la disequazione è sempre verificata, si ottiene



La derivata prima è positiva negli intervalli aperti $]-\infty\ ;\mathbf{0}[\ \cup]\mathbf{0}\ ; +\infty[$, ivi, la cubica è crescente. Inoltre, per $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ la derivata prima è nulla quindi per questo valore la funzione data è costante.

7) <u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale (punti stazionari)</u>

Nell'intorno del valore **0** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni:

+	**0**	+

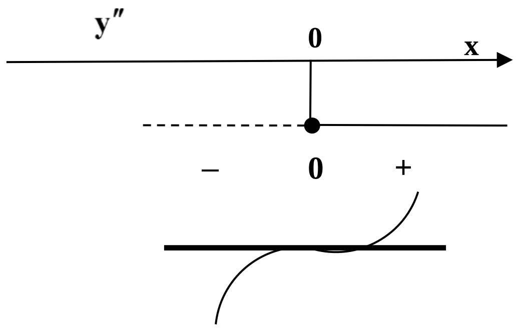
Pertanto, la funzione data ha nel punto **O(0;0)** un punto di flesso crescente a tangente orizzontale.

8) Concavità e/o convessità

Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè $f''(x) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}$, si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{3}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Quindi la funzione data è concava verso l'alto nell'intervallo dove la derivata seconda è positiva, ossia per $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, mentre è concava verso il basso nell'intervallo dove la derivata seconda è negativa, cioè per $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, inoltre la derivata seconda è nulla per $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
Nell'intorno del valore **0** la derivata seconda presenta la seguente combinazione di segni:

–	**0**	+

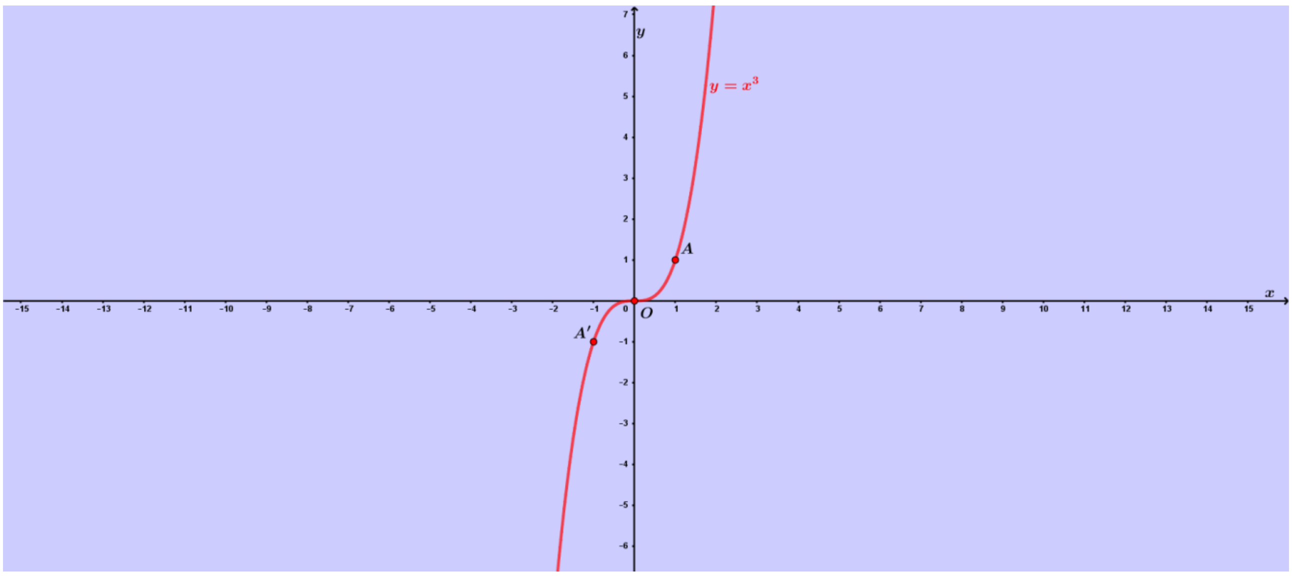
Pertanto, si conferma che la funzione data ha nel punto **O(0;0)** un punto di flesso crescente a tangente orizzontale.



9) Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua (punti non stazionari)

Non esistono ulteriori punti di flesso.

10) Grafico



Torna su