# STUDIO DELLA FUNZIONE CUBICA

$$y = x^3 - 4x$$

## 1) Classificazione e Campo di esistenza

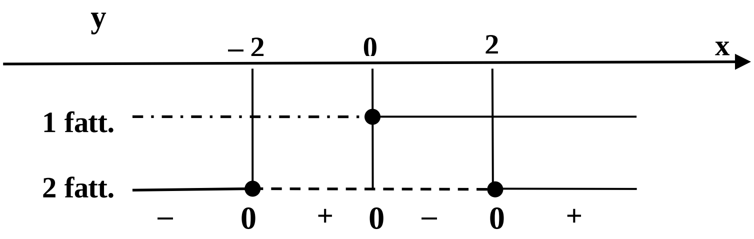
Funzione algebrica razionale intera di terzo grado, parabola cubica. C. E.: $\forall x \in \Re$ (simbologia insiemistica oppure $]-\infty \; ; \; +\infty[$ (simbologia topologica).

## 2) Simmetrie

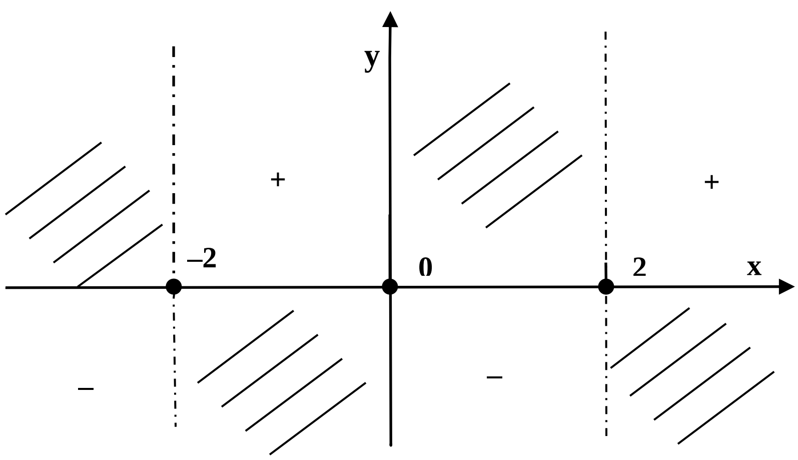
Si pone $f(x) = x^3 - 4x$ allora $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)$ ossia $f(-x) = -x^3 + 4x$, quindi la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, perché: $f(x) = -f(-x)$ .

## 3) Studio del segno

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè:
$x^3 - 4x \geq 0$ cioè: $x(x^2 - 4) \geq 0$ , pertanto, si può scrivere:
1 fattore: $x \geq 0$ ,
2 fattore: $x^2 - 4 \geq 0$ per $x \leq -2 \; ; \; x \geq 2$ .




Quindi, per $-2 < x < 0$ e per $x > 2$ la funzione è positiva, mentre per $x < -2$ e per $0 < x < 2$ la funzione è negativa. Infine, per $x = 0$ e per $x = \pm 2$ la funzione è nulla.



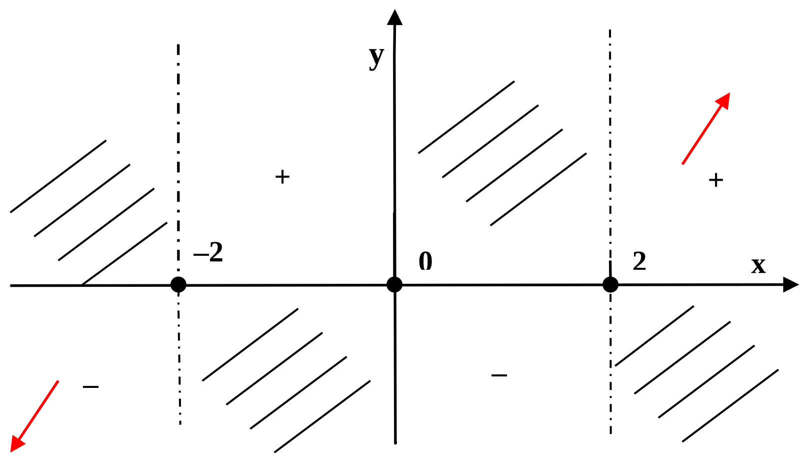
**4) <u>Intersezioni con gli assi cartesiani</u>**

$\cap_y \begin{cases} y = x^3 - 4x \\ x = 0 \end{cases}$ ossia passa per l'origine degli assi cartesiani.

$\cap_x \begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = 0 \end{cases}$ ossia interseca l'asse delle ascisse nei punti $O(0;0)$, $A(-2;0)$ e $A'(2;0)$.

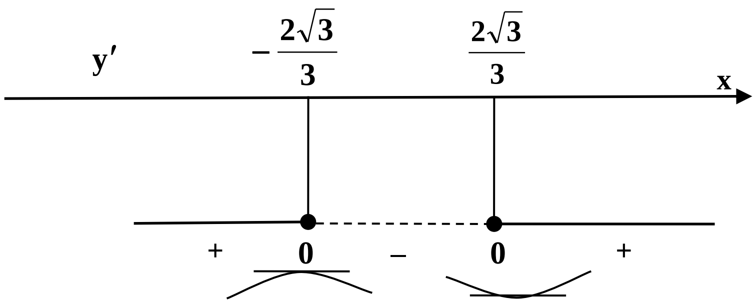
**5) <u>Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio</u>**

Poiché l'intervallo di esistenza della funzione è $]-\infty\ ;\ +\infty[$, si calcolano i limiti della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, cioè $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 4x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4x) = -\infty$.




**6) <u>Crescenza e decrescenza</u>**

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè: $y' = 3x^2 - 4$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè: $3x^2 - 4 \geq 0$, pertanto, la disequazione è verificata per $x \leq -\sqrt{\frac{4}{3}}$, $x \geq \sqrt{\frac{4}{3}}$, cioè per $x \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.




Quindi, la derivata prima è negativa per $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$, pertanto, in questo intervallo la funzione data è decrescente, mentre negli intervalli dove la derivata prima è positiva, cioè per

$\mathbf{x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ e per $\mathbf{x > \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ , la cubica è crescente. Infine, nei punti dove la derivata prima è nulla si ha che la funzione data è costante, ossia per $\mathbf{x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

## 7) Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale

La funzione data ha nel punto $\mathbf{B\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)}$ un massimo relativo, mentre nel punto $\mathbf{B'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)}$ ha un minimo relativo.

## 8) Concavità e convessità

Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè: $\mathbf{y'' = 6x}$, si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{6x \geq 0}$, pertanto si ottiene $\mathbf{x \geq 0}$. Quindi la funzione data è concava verso l'alto nell'intervallo dove la derivata seconda è positiva, ossia per $\mathbf{x > 0}$, mentre è concava verso il basso nell'intervallo dove la derivata seconda è negativa, cioè per $\mathbf{x < 0}$ .

## 9) Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua

Poiché $\mathbf{f(x_0) = f(0) = 0}$ e $\mathbf{f'(x_0) = f'(0) = -4 < 0}$ la funzione data presenta in $\mathbf{O(0;0)}$ un punto di flesso a tangente obliqua discendente. Per determinare l'equazione della retta tangente nell'origine degli assi cartesiani si applica la seguente equazione: $\mathbf{y - f(x_0) = m(x - x_0)}$ dove $\mathbf{m = f'(x_0)}$. Pertanto, si ottiene $\mathbf{y = -4x}$.

## 10) Grafico


Torna su