Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO DELLA FUNZIONE:

$$y = 3x^4 - 4x^3$$

1) **Classificazione e Campo di esistenza** :

Funzione algebrica razionale intera di quarto grado, C.E. o dominio della funzione è : $\forall x \in \Re$ (simbologia insiemistica) , oppure $\left]-\infty;+\infty\right[$ (simbologia topologica).

2) **Simmetrie** :

Si pone $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ allora: $f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^3$ ossia: $f(-x) = 3x^4 + 4x^3$, quindi la funzione non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, cioè non è una funzione pari, perché dal punto di vista algebrico si ha che $f(x) \neq f(-x)$, inoltre, non è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, ossia non è una funzione dispari, perché si ottiene che $f(x) \neq -f(-x)$.

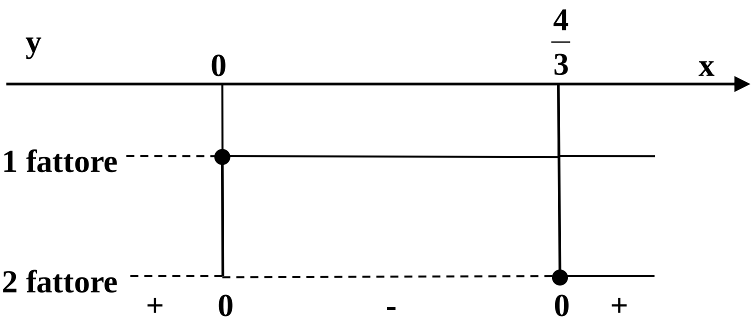
3) **Studio del segno** :

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè:

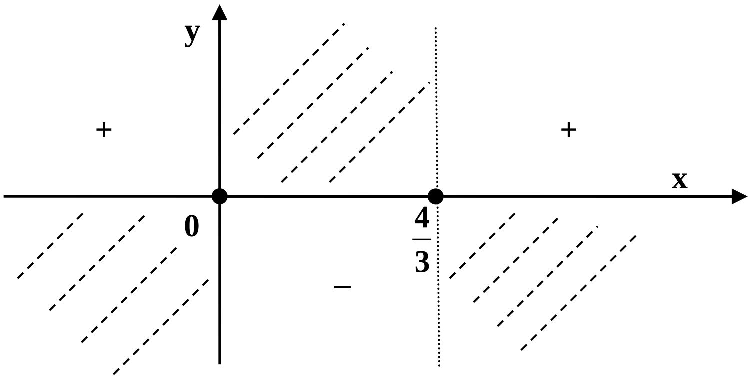
$3x^4 - 4x^3 \geq 0$ cioè: $x^3(3x - 4) \geq 0$, pertanto, si può scrivere:

1 fattore: $x^3 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$,

2 fattore: $3x - 4 \geq 0$ per $x \geq \frac{4}{3}$.



Quindi per $x < 0$ e per $x > \frac{4}{3}$ la funzione è positiva, mentre per $0 < x < \frac{4}{3}$ la funzione è negativa, infine per $x = 0$ e per $x = \frac{4}{3}$ la funzione è nulla.



4) **<u>Intersezioni con gli assi cartesiani</u>** :

$\cap_y \begin{cases} \mathbf{y = 3x^4 - 4x^3} \\ \mathbf{x = 0} \end{cases} \rightarrow \mathbf{y = 0}$ ossia passa per l'origine degli assi cartesiani.

$\cap_x \begin{cases} \mathbf{y = 3x^4 - 4x^3} \\ \mathbf{y = 0} \end{cases} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{x = \frac{4}{3}} \end{array} \right.$ ossia interseca l'asse delle x, sia nell'origine che nel punto $\mathbf{A\left(\frac{4}{3};0\right)}$.

5) **<u>Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo che costituisce il dominio</u>** :

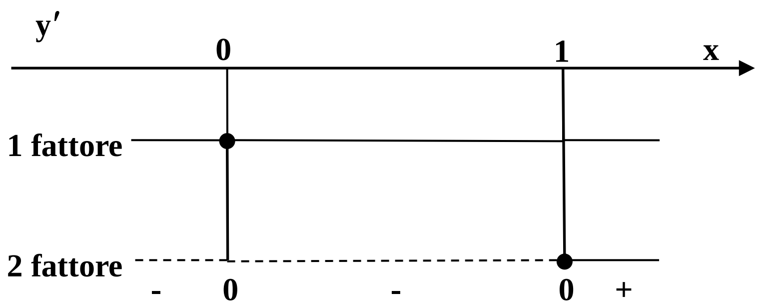
$\mathbf{\lim_{x\to+\infty}(3x^4 - 4x^3) = +\infty}$ e $\mathbf{\lim_{x\to-\infty}(3x^4 - 4x^3) = +\infty}$.

6) **<u>Crescenza e/o decrescenza</u>** :

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè: $\mathbf{y' = 12x^3 - 12x^2}$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{12x^3 - 12x^2 \geq 0}$, ossia: $\mathbf{12x^2(x-1) \geq 0}$, pertanto, si ottiene:

1 fattore: $\mathbf{12x^2 \geq 0}$ la disequazione è sempre verificata nel C.E. , cioè $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}$;

2 fattore: $\mathbf{x - 1 \geq 0}$ per $\mathbf{x \geq 1}$.



Quindi, la derivata prima della funzione data è negativa per $\mathbf{x<0}$ e per $\mathbf{0<x<1}$, pertanto, ivi la funzione è decrescente, mentre la derivata prima della funzione è positiva per $\mathbf{x>1}$, allora, ivi la funzione è crescente. Infine, la derivata prima è nulla per $\mathbf{x=0}$ e per $\mathbf{x=1}$, ivi la funzione è costante. (L'annullarsi della derivata prima è condizione necessaria affinché esistano punti estremanti, ossia minimanti o massimanti.)

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u>** :

La funzione data ha nell'origine degli assi cartesiani un punto di flesso discendente a tangente orizzontale, mentre ha un minimo relativo nel punto di ascissa $\mathbf{x=1}$(minimante). Per determinare il valore di minimo si sostituisce $\mathbf{x=1}$ nell'equazione della funzione, ossia $\mathbf{f(1)=3\bullet1-4\bullet1=3-4=-1}$. Pertanto, la funzione ha un minimo relativo in $\mathbf{B(1;-1)}$.

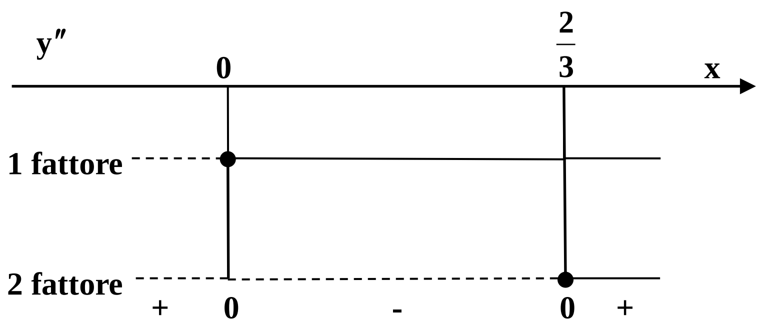
8) **<u>Concavità e/o convessità</u>** :

Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè: $\mathbf{y''=36x^2-24x}$.

Si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{36x^2-24x\geq0}$, ossia $\mathbf{12x(3x-2)\geq0}$, pertanto, si ottiene:

1 fattore: $\mathbf{12x\geq0\rightarrow x\geq0}$;

2 fattore: $\mathbf{3x-2\geq0\rightarrow x\geq\frac{2}{3}}$.



Quindi la derivata seconda della funzione data è positiva per $\mathbf{x<0}$ e per $\mathbf{x>\frac{2}{3}}$, pertanto, ivi la funzione è concava verso l'alto, mentre la derivata seconda della funzione è negativa per $\mathbf{0<x<\frac{2}{3}}$, ivi la funzione è concava verso il basso, inoltre, la derivata seconda si annulla per $\mathbf{x=0}$ e per $\mathbf{x=\frac{2}{3}}$. (L'annullarsi della derivata seconda è condizione necessaria affinché esistano punti di flesso.)

9) <u>Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua</u> :

La funzione data presenta due punti di inflessione, e precisamente:

$\mathbf{0(0;0)}$, ossia l'origine degli assi cartesiani, punto di flesso discendente a tangente orizzontale, (precedentemente trovato) e un punto di flesso a tangente obliqua per $\mathbf{x=\frac{2}{3}}$. Per determinare l'ordinata del punto di flesso si sostituisce $\mathbf{x=\frac{2}{3}}$ nell'equazione della funzione data, cioè $\mathbf{f\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^4-4\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27}-\frac{32}{27}=-\frac{16}{27}}$, pertanto, si ottiene il punto $\mathbf{C\left(\frac{2}{3};-\frac{16}{27}\right)}$. Infine , per stabilire se è un punto di flesso ascendente o discendente si osserva che nel valore $\mathbf{x=\frac{2}{3}}$ la derivata prima della funzione risulta negativa, quindi si può affermare che la tangente obliqua del flesso è decrescente, quindi il punto $\mathbf{C\left(\frac{2}{3};-\frac{16}{27}\right)}$ è un punto di inflessione discendente.

Osservazioni finali:

- Il punto di minimo relativo $\mathbf{B(1;-1)}$ risulta essere anche il punto di minimo assoluto.

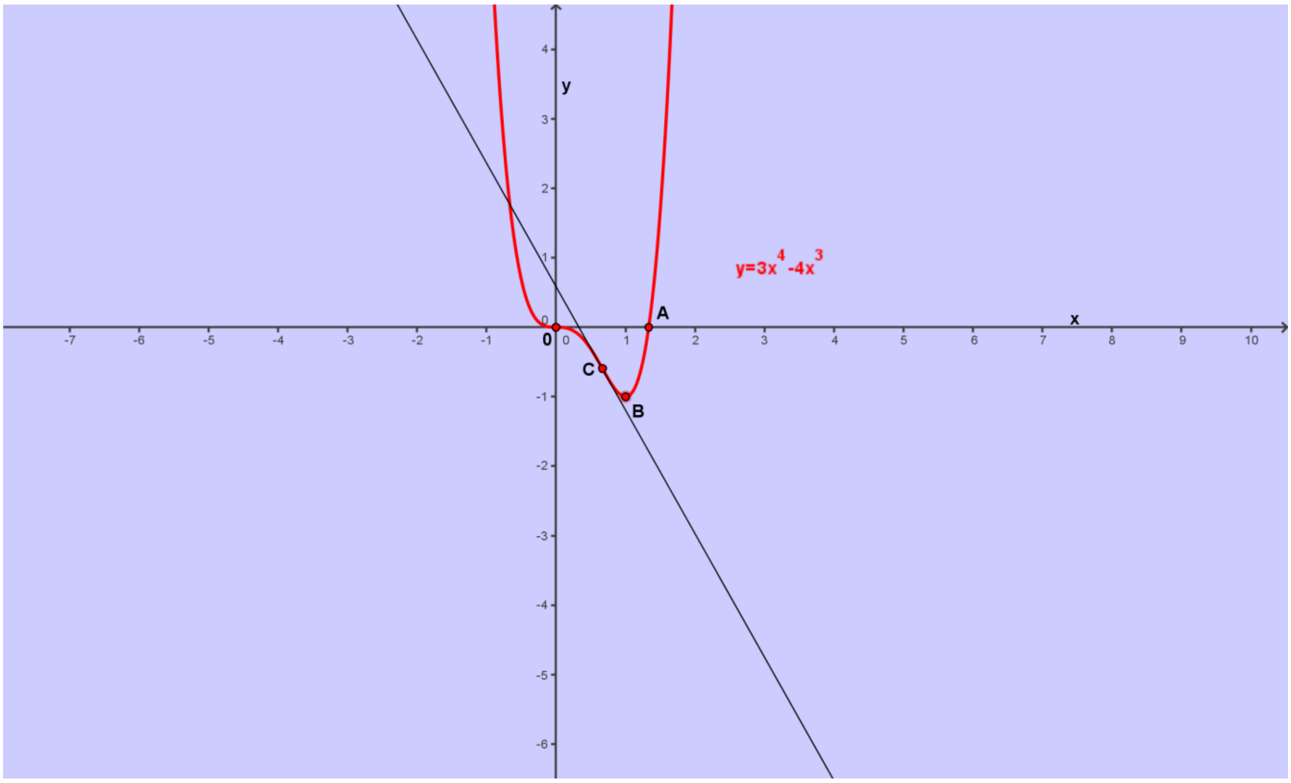
- Per determinare l'equazione della tangente obliqua del punto di flesso $\mathbf{C\left(\frac{2}{3};-\frac{16}{27}\right)}$ si applica la seguente formula (equazione della retta passante per un punto): $\mathbf{y-y_o=m(x-x_0)}$ dove $\mathbf{m=f'(x_o)}$, mentre $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{y_0}$ sono le coordinate del punto di flesso. Pertanto, ha senso scrivere:

  $\mathbf{m=f'\left(\frac{2}{3}\right)=12\left(\frac{2}{3}\right)^3-12\left(\frac{2}{3}\right)^2=12\left(\frac{8}{27}-\frac{4}{9}\right)=12\left(\frac{8-12}{27}\right)=12\left(-\frac{4}{27}\right)=-\frac{16}{9}}$ quindi

  $\mathbf{y+\frac{16}{27}=-\frac{16}{9}\left(x-\frac{2}{3}\right)\rightarrow y=-\frac{16}{9}x+\frac{32}{27}-\frac{16}{27}\rightarrow y=-\frac{16}{9}x+\frac{16}{27}}$ ossia l'equazione della tangente obliqua del flesso $\mathbf{C\left(\frac{2}{3};-\frac{16}{27}\right)}$.

- La funzione data essendo algebrica razionale intera non presenta asintoti.

10) **<u>Grafico</u>** :



Torna su