STUDIO DELLA FUNZIONE PARABOLA QUARTICA

$$\mathbf{y = x^4 - 4x}$$

1) Classificazione e Campo di esistenza

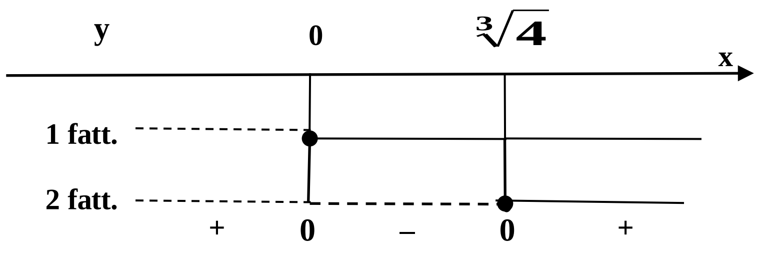
Funzione algebrica razionale intera di quarto grado, parabola quartica, la sua forma implicita è $\mathbf{x^4 - 4x - y = 0}$. C. E.: $\forall \mathbf{x} \in \Re$ (simbologia insiemistica) o $\mathbf{]-\infty\ ;\ +\infty[}$ (topologica).

2) Simmetrie

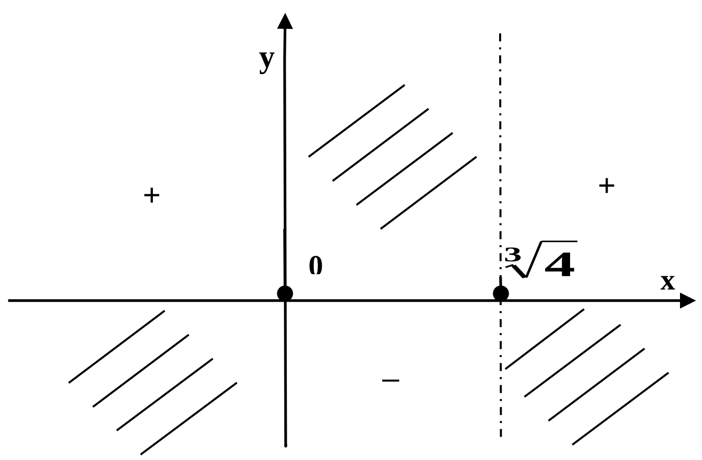
Si pone $\mathbf{f(x) = x^4 - 4x}$ allora $\mathbf{f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)}$ ossia $\mathbf{f(-x) = x^4 + 4x}$, quindi la funzione non è simmetrica sia rispetto all'asse delle ordinate (pari) che rispetto all'origine degli assi cartesiani (dispari), perché: $\mathbf{f(x) \neq \pm f(-x)}$.

3) Studio del segno

Si pone il secondo membro dell'equazione della funzione maggiore o uguale a zero, cioè:
$\mathbf{x^4 - 4x \geq 0}$ cioè: $\mathbf{x(x^3 - 4) \geq 0}$, pertanto, si può scrivere:
1 fattore: $\mathbf{x \geq 0}$,
2 fattore: $\mathbf{x^3 - 4 \geq 0}$ cioè $\mathbf{x^3 \geq 4}$ quindi per $\mathbf{x \geq \sqrt[3]{4}}$.



Quindi, per $\mathbf{x < 0}$ e per $\mathbf{x > \sqrt[3]{4}}$ la funzione è positiva, mentre per $\mathbf{0 < x < \sqrt[3]{4}}$ la funzione è negativa. Infine, per $\mathbf{x = 0}$ e per $\mathbf{x = \sqrt[3]{4}}$ la funzione è nulla.



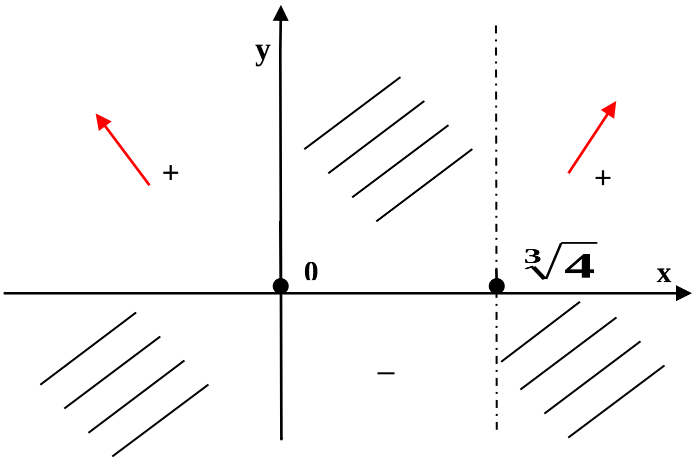
4) Intersezioni con gli assi cartesiani

$\cap_y \begin{cases} y = x^4 - 4x \\ x = 0 \end{cases}$ ossia passa per l'origine degli assi cartesiani.

$\cap_x \begin{cases} y = x^4 - 4x \\ y = 0 \end{cases}$ interseca l'asse delle x, oltre nel punto $\mathbf{O(0;0)}$, anche nel punto $\mathbf{A(\sqrt[3]{4};0)}$.

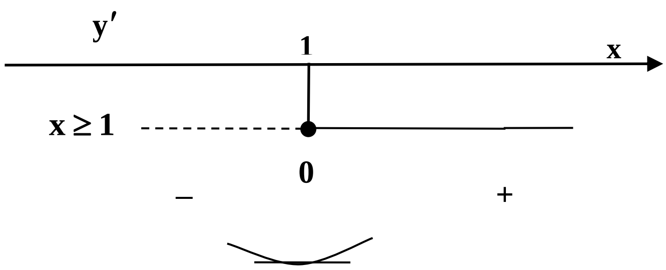
5) Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio

Poiché l'intervallo di esistenza della funzione è $]-\infty\ ;\ +\infty[$, si calcolano i limiti della funzione negli estremi dell'intervallo del campo di esistenza. Pertanto, per $x \to +\infty$ si ha $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x) = +\infty - \infty$. Il limite dà una forma indeterminata, per eliminare la forma di indecisione si mette in evidenza la x di grado massimo, cioè $\lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \underbrace{\frac{4}{x^3}}_{0}\right) = +\infty$, mentre per $x \to -\infty$ si ottiene che $\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 4x) = +\infty + \infty = +\infty$.



6) Crescenza e/o decrescenza

Si calcola la derivata prima della funzione, cioè: $y' = 4x^3 - 4$, si pone poi la derivata prima maggiore o uguale a zero, cioè: $4x^3 - 4 \geq 0$, ossia: $4x^3 \geq 4 \to x^3 \geq 1 \to x \geq 1$, pertanto, si ottiene:



Quindi, la derivata prima è negativa per $x < 1$, pertanto, la funzione data è decrescente per $x < 1$, mentre la derivata prima è positiva per $x > 1$, ivi, la quartica è crescente. Infine, nel punto dove la derivata prima è nulla si ha che la funzione data è costante, ossia per $x = 1$.

7) Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale

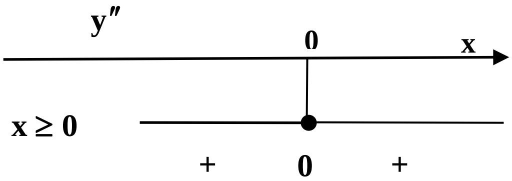
Nell'intorno del valore **1** la derivata prima presenta la seguente combinazione di segni:

–	**0**	+

pertanto **1** è un minimante, essendo $\mathbf{f(1) = 1 - 4 = -3}$ la funzione data ha nel punto **B(1;–3)** un punto di minimo relativo.

8) Concavità e/o convessità

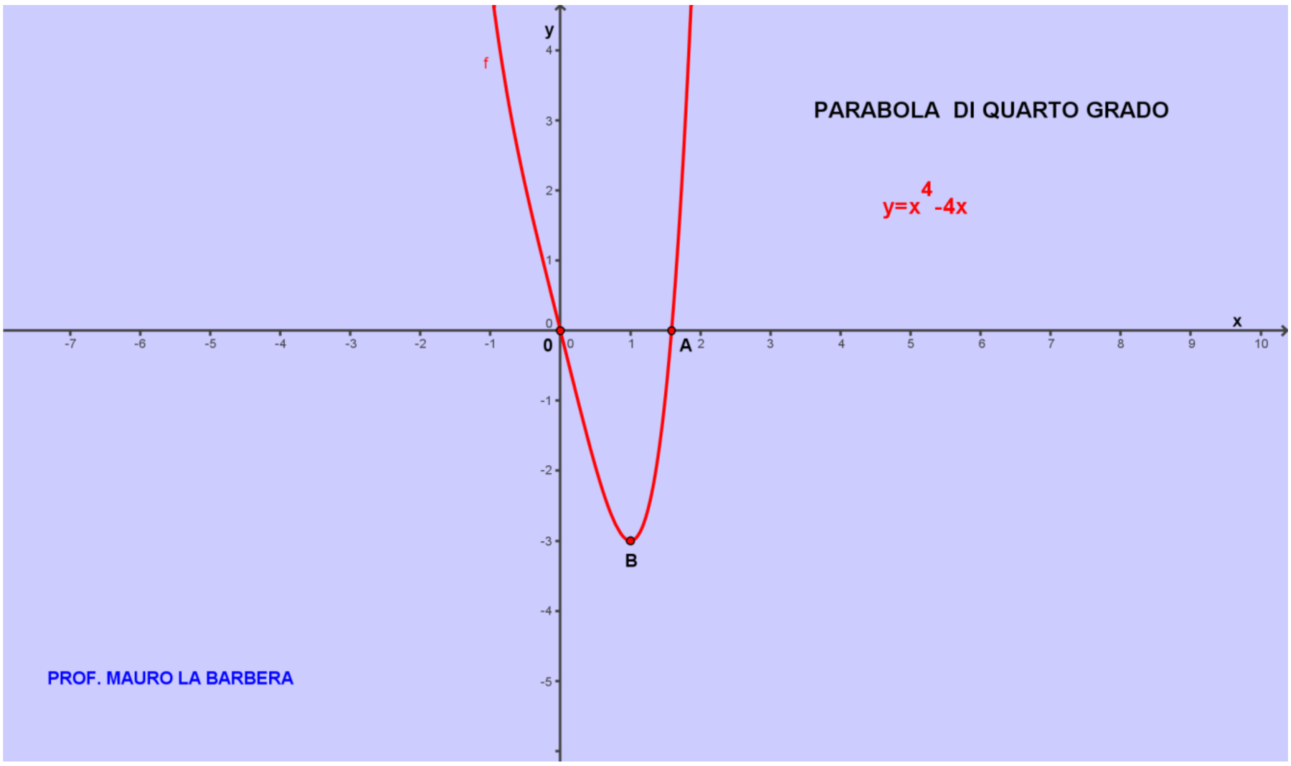
Si calcola la derivata seconda della funzione, cioè: $\mathbf{y'' = 12x^2}$, si pone poi la derivata seconda maggiore o uguale a zero, cioè: $\mathbf{12x^2 \geq 0}$, pertanto si ottiene $\mathbf{x^2 \geq 0}$, cioè la disequazione è sempre verificata, quindi la derivata seconda è sempre positiva, tranne nel punto $\mathbf{x = 0}$ dove si annulla, quindi la funzione data è concava verso l'alto per tutto l'asse reale.



9) Ricerca di ulteriori punti di flesso a tangente obliqua

Poiché nell'intorno del valore **0** la funzione non cambia di concavità la curva non ha punti di flesso.
Si osserva che il punto di minimo relativo, precedentemente trovato, è anche un punto di minimo assoluto per la funzione.

10) Grafico



Torna su