[Analisi]

[Classe quinta]

STUDIO COMPLETO
DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio A:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di secondo grado,

C.E.: $\forall x \in \Re - \{1\}$.

2) **Simmetrie** :

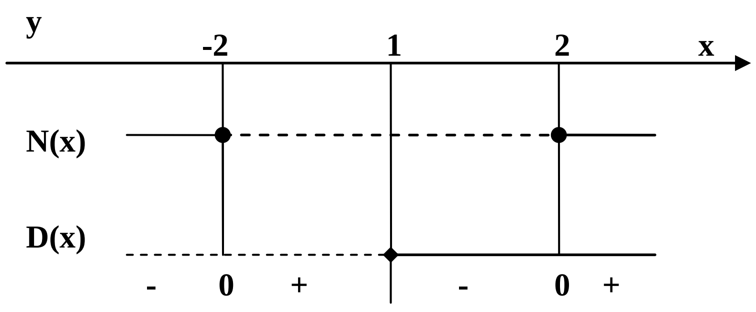
Essendo $f(x) \neq \pm f(-x)$, la funzione data non è simmetrica sia rispetto all'asse y che rispetto all'origine degli assi cartesiani.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq 0$ ossia:

$N(x): x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$

$D(x): x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$



La funzione è positiva per $-2 < x < 1$ e per $x > -2$; è negativa per $x < -2$ e per $1 < x < 2$, è nulla per $x = \pm 2$, non esiste per $x = 1$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

$$\cap_x \begin{cases} y = \dfrac{x^2-4}{x-1} \\ y = 0 \end{cases}$$ Interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-2;0)$ e $B(2;0)$,

$$\cap_y \begin{cases} y = \dfrac{x^2-4}{x-1} \\ x = 0 \end{cases}$$ Interseca l'asse delle ordinate nel punto $C(0;4)$.

5) **Asintoti** :

La funzione ha due asintoti: uno verticale ed uno obliquo, infatti:

sapendo che $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4}{x-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-4}{x-1} = +\infty$ allora $x = 1$ è l'equazione dell'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$, forma d'indecisione, quindi, per poter calcolare il limite, si può applicare il Teorema di De L'Hôpital, pertanto, si ottiene: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1} = +\infty$,

analogamente si ha $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{1} = -\infty$, pertanto, sicuramente la funzione non presenta asintoto orizzontale. Sapendo che l'equazione di una retta inclinata è del tipo $y = mx + n$, si calcola il coefficiente angolare **m,** mediante la formula**:**

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Quindi, in particolare si ha:

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x-1} \times \dfrac{1}{x} = \lim \dfrac{x^2-4}{x^2-x} = \dfrac{\infty}{\infty}$, forma d'indecisione, quindi, per poter calcolare il limite, si può applicare il Teorema di De L'Hôpital, pertanto, si ottiene:

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{2x-1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$, analogamente si ha per $x \to -\infty$, quindi, si è trovato che $m = 1$ è il coefficiente angolare.

Adesso, si calcola l'intercetta **n** della retta inclinata, mediante la formula:

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Quindi, in particolare si ha:

$\mathbf{n = lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x-1}-x\right) = lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2+x}{x-1} = lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x-1}} = \frac{\infty}{\infty}$, forma d'indecisione, quindi, per poter calcolare il limite, si può applicare il Teorema di De L'Hôpital, pertanto, si ottiene: $\mathbf{lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x-1} \overset{H}{=} lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1} = lim_{x\to+\infty} 1 = 1}$, analogamente si ha per $\mathbf{x \to -\infty}$.

Pertanto, la funzione data ha un asintoto obliquo di equazione $\mathbf{y = x + 1}$.

6) **Crescenza o decrescenza** :

Calcolando la derivata prima si ha:

$$\mathbf{y' = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2+4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$\mathbf{N(x): x^2-2x+4 > 0 \to sempre}$ (notare che $\mathbf{\Delta < 0}$),

$\mathbf{D(x): (x-1)^2 > 0 \to sempre\ \ nel\ \ C.E.,}$

pertanto, essendo la derivata prima sempre positiva nel suo dominio, la funzione data è sempre crescente, quindi, non possono esistere massimi, minimi relativi e punti di flesso a tangente orizzontale.

7) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

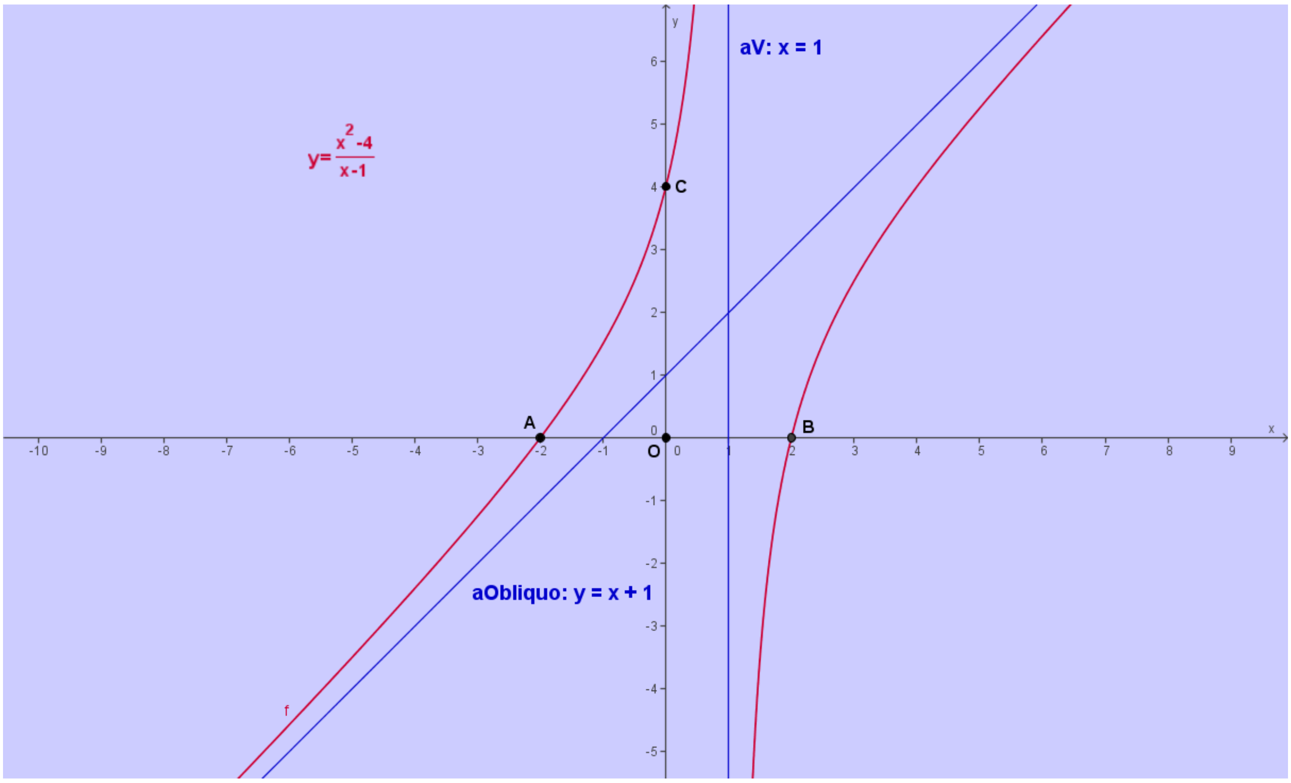
$$\mathbf{y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+4)(2x-2)}{(x-1)^4} = -\frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{6}{(x-1)^3}},$$

studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$\mathbf{N(x): -6 < 0 \to sempre}$,

$\mathbf{D(x): (x-1)^3 > 0 \to x-1 > 0 \to x > 1}$, pertanto, per $\mathbf{x > 1}$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione data è concava verso il basso (convessa verso l'alto), mentre per $\mathbf{x < 1}$ la derivata seconda è positiva, quindi, la funzione data è concava verso l'alto (convessa verso il basso), pertanto, poiché la derivata seconda non si annulla mai, non possono esistere punti di flesso né a tangente orizzontale né a tangente obliqua.

8) **Grafico** :



Torna su